情報数学III講義（第1回）

平成28年10月5日

1　導入

1.1　微分係数

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分係数は，ある $x \in \mathbb{R}$ における平均変化率の極限から以下のように定義される．

$$f'(x) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

このとき，$|h|$ が十分小さいとすると

$$hf'(x) \;\approx\; f(x+h) - f(x)$$

という近似が成り立つ．ここで，$h = 0$ のときにのみ等式として成立するが，17〜18世紀では h がたくさんあるような世界で微積分をしていた．どのような数を用いていたかというと，2回かけて0になる数，つまり次の集合 D に含まれる d を考えていた．

$$D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\} \quad (\neq \{0\})$$

極限の考え方では徐々に小さくしていくと接線に近づくが，接線と一致することはない．しかし，当時の数学者は十分小さくて D にはいる距離であれば接線と一致するという考えだった．一般に $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ であるため，D に含まれる数は0しかあり得ないはずだが，彼らはこのような数が関数 f の点 x における接線の傾きを決定するくらいにたくさん存在するとしていた．したがって，

$$\exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x+d) - f(x) = ad \quad (\forall d \in D) \tag{1}$$

となるような唯一の実数 a を導関数 $f'(x)$ と定義した．

一般に関数は微分可能とは限らない．しかしここで扱う関数は定義域の任意の点において微分可能であると仮定する．

Kock-Lawvere の公理

任意の関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して唯一の実数 a が存在し，$\forall d \in D$ に対して次が成り立つ.

$$f(d) = f(0) + ad$$

Kock-Lawvere の公理から式 (1) が導けることを示そう. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi : D \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$\varphi(d) = g(x+d).$$

このとき次の議論が成立する：

$$\begin{aligned} & \forall f : D \to \mathbb{R} \quad \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(d) = f(0) + ad \quad (\forall d \in D) \\ \Rightarrow \quad & \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \varphi(d) = \varphi(0) + ad \quad (\forall d \in D) \\ \Rightarrow \quad & \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad g(x+d) = g(x) + ad \quad (\forall d \in D). \end{aligned}$$

1.2 導関数の公式

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の和と積の公式：

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' && \text{（和の公式）} \\ (fg)' &= f'g + fg' && \text{（積の公式）} \end{aligned}$$

の証明を取り上げて，2 つの考え方の違いを述べる.

§ 和の公式

高校数学では，平均変化率の極限を考えて次のように証明する.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) + g(x+h) - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ & \quad = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

しかし，ニュートンらが活躍した 17〜18 世紀の考え方では，式 (1) より得られる

$$\begin{cases} f(x+d) = f(x) + f'(x)d & (2) \\ g(x+d) = g(x) + g'(x)d & (3) \end{cases}$$

を用いて次のように証明できる.

$$\begin{aligned} & f(x+d) + g(x+d) \\ & \quad = f(x) + f'(x)d + g(x) + g'(x)d \\ & \quad = f(x) + g(x) + \{f'(x) + g'(x)\}d \end{aligned}$$

§ 積の公式

同様に積の公式（Leibniz の公式）を証明する．高校数学では

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)}_{f'(x)g(x)} + \underbrace{f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{f(x)g'(x)} \quad (h \to 0)
\end{aligned}
$$

と証明したかもしれないが，ニュートンらの時代には式 (2)，式 (3) を用いて次のように証明した．

$$
\begin{aligned}
&f(x+d)g(x+d) \\
&\quad = \{f(x)+f'(x)d\}\{g(x)+g'(x)d\} \\
&\quad = f(x)g(x)+\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}d+f'(x)g'(x)\underbrace{d^2}_{0}
\end{aligned}
$$

ここで，$d^2=0$ であることを思い出すと Leibniz の公式が導き出されていることが確認できる．

1.3 合成関数の導関数

微分可能な関数 $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ の導関数：

$$
(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)
$$

は以下のように証明できる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} \\
&\quad = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&\quad = \frac{g(f(x)+\{f(x+h)-f(x)\})-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&\quad = \underbrace{\frac{g(f(x)+H)-g(f(x))}{H}}_{g'(f(x))}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} \quad (h \to 0)
\end{aligned}
$$

ここで，$H = f(x+h)-f(x)$ としているが，$h \to 0$ のとき $H \to 0$ であるため，合成関数の導関数が導き出される．次に，19 世紀以前の数学者による証明を示す．

$$
\begin{aligned}
g(f(x+d)) &= g(f(x)+f'(x)d) \\
&\quad g(f(x))+g'(f(x))d' \quad （f'(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)d = d' \in D） \\
&\quad g(f(x))+g'(f(x))f'(x)d
\end{aligned}
$$

余談となるが，$d_1, d_2 \in D$ としたとき

$$(d_1 + d_2)^2 \;=\; d_1^2 + \underbrace{2d_1d_2}_{\neq 0} + d_2$$

となるため，$(d_1 + d_2) \notin D$ であることに注意されたい．

1.4　多項式の導関数

§ 定数関数

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; c \\ f(x+d) - f(x) \;&=\; c - c \;=\; 0 \;=\; 0d \end{aligned}$$

定数関数の微分は 0 となる．

§ 1 次関数

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; x \\ f(x+d) - f(x) \;&=\; x + d - x \;=\; d \;=\; 1d \end{aligned}$$

よって，$f'(x) = 1$ となる．

§ 2 次関数

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; x^2 \\ f(x+d) - f(x) \;&=\; (x+d)^2 - x^2 \;=\; 2xd + \underline{d^2} \;=\; 2xd \end{aligned}$$

よって，$f'(x) = 2x$ となる．

導関数の性質を以下に示す．この性質を用いることで，多項式の導関数を導出できる．

導関数の性質

(1)　$(\alpha)' \;=\; 0$

(2)　$(\alpha f)' \;=\; \alpha f'$

(3)　$(f+g)' \;=\; f' + g'$　（和の導関数）

(4)　$(fg)' \;=\; f'g + fg'$　（積の導関数）

(5)　$\left(\dfrac{f}{g}\right)' \;=$　（商の導関数）

(6)　$(x^n)' \;=$　（hint:二項定理を用いる）

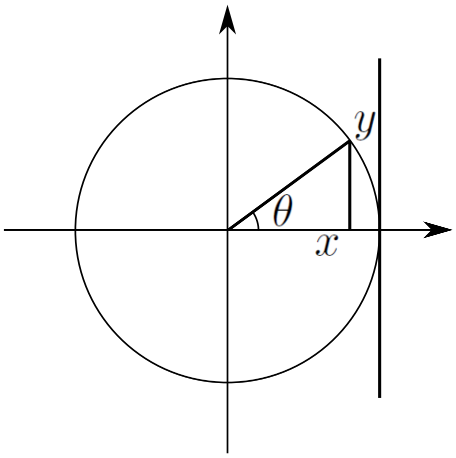
1.5　それ以外の関数の導関数

§ 三角関数

単位円において角度 θ の円弧を考えると，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は次のような性質を持つ．

$$\begin{aligned}\sin\theta &= y \\ \cos\theta &= x\end{aligned}$$

角度が十分小さい $d = \theta \in D$ の場合，円弧が接線と一致するため $\sin d = d, \cos d = 1$ となる．sin と cos の微分は加法定理を用いて証明できる．



- $\sin x$ の微分

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d} = \sin x + d\cos x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$

- $\cos x$ の微分

$$\cos(x+d) = \cos x \underbrace{\cos d}_{1} - \sin x \underbrace{\sin d}_{d} = \cos x + d\sin x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

ここで，$\sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ について考えてみると，$d^2 + 1^2 = 1$ となることが確認できる．

§ 指数関数

はじめに，底はなんでも良いが，10 として考える．Kock-Lawvere の公理より

$$f(x) = 10^x$$
$$f(d) = 10^d = 10^0 + ad = 1 + ad$$

となる実数 a が一意的に定まる．よって $f'(0) = a$ となる．次に，任意の正の実数 α を底とする．

$$g(x) = \alpha^x$$
$$g(d) = \alpha^d = (10^{\log_{10}\alpha})^d = 10^{d\log_{10}\alpha} = 1 + a(\log_{10}\alpha)d$$

ここで，d の係数 $a\log_{10}\alpha$ は α の関数である．$a\log_{10}\alpha = 1$ となるような α はネイピア数 e である．最後に底を e としたときについて考える．指数法則を用いると

$$\begin{aligned} e^{x+d} - e^x &= e^x e^d - e^x \\ &= e^x \underbrace{(e^d - 1)}_{1d} = e^x d \end{aligned}$$

となる．したがって，$(e^x)' = e^x$ である．

1.6 テイラー展開

微分の定義は以下の通りである．

$$f(x + d_1) = f(x) + f'(x)d \quad (d_1 \in D)$$

これに対して，$d_1, d_2 \in D$ を用いて $f(x + d_1 + d_2)$ を考えてみる．

$$\begin{aligned} f(x + d_1 + d_2) &= f(x + d_1) + f'(x + d_1)d_2 \\ &= f(x) + f'(x)d_1 + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2 \\ &= f(x) + f'(x)(d_1 + d_2) + f'(x)d_1d_2 \end{aligned}$$

ここで，$d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$ であるため，

$$f(x + d_1 + d_2) = f(x) + f'(x)(d_1 + d_2) + \frac{1}{2}f''(x)(d_1 + d_2)^2$$

となる．これが $f(x)$ における 2 次近似である．続いて，$d_1, d_2, d_3 \in D$ を用いて 3 次近似についても展開して調べてみる．

$$\begin{aligned} f(x + d_1 + d_2 + d_3) &= f(x + d_1 + d_2) + f'(x + d_1 + d_2)d_3 \\ &= f(x) + f'(x)(d_1 + d_2) \\ &\quad + f''(x)d_1d_2 + \{f'(x) + f''(x)(d_1 + d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3 \\ &= f(x) + f'(x)(d_1 + d_2 + d_3) \\ &\quad + f''(x)(d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1) + f'''(x)d_1d_2d_3 \end{aligned}$$

ここで，$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1=\frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}, d_1d_2d_3=\frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6}$ であるため，3 次近似は

$$
\begin{aligned}
f(x+d_1+d_2+d_3) &= f(x)+f'(x)(d_1+d_2+d_3) \\
&\quad + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2+d_3)^2+\frac{f'''(x)}{6}(d_1+d_2+d_3)^3
\end{aligned}
$$

のように表せる．

1.7 多変数の Kock-Lawvere の公理

上で定義した Kock-Lawvere の公理は n 次元でも成り立つ．
$f: D \to \mathbb{R}^n, f(d)=\begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix}$ とすると，$f_i: D \to \mathbb{R}$ に対して Kock-Lawvere の公理から

$$\exists! a_i \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f_i(d)-f_i(0)=a_id \quad (\forall d \in D) \tag{4}$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
f(d) &= \begin{pmatrix} f_1(d) \\ \vdots \\ f_n(d) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(0)+a_1d \\ \vdots \\ f_n(0)+a_nd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ f_n(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} d \\
&= f(0)+\boldsymbol{a}d \quad \left(\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \text{ とした}\right)
\end{aligned}
$$

と変形することが出来る．