

氏名	張志朗
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第7635号
学位授与年月日	平成28年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	

Inradius collapsed manifolds  
(内半径崩壊する多様体)

主査	筑波大学准教授	理学博士	田崎博之
副査	筑波大学講師	博士(数理学)	永野幸一
副査	筑波大学教授	博士(理学)	井ノ口順一
副査	京都大学教授	理学博士	山口孝男

## 論文の要旨

本論文では、断面曲率が下に、境界の第2基本形式が両側に、そして直径が上に一様に有界であるような、境界つきコンパクト・リーマン多様体の族におけるグロモフ・ハウドルフ収束が考察されている。この方向の研究は、近年、Jeremy Wong氏により研究の端緒が開かれ、Wong氏により開発された境界を延長する手法が有効性を持っている。しかしながら、まだ境界つき多様体の崩壊の研究は未知の部分が多い状況であった。本論文では、Wong氏の手法を更に展開することにより、特に内半径がゼロに収束するような崩壊多様体の極限空間の構造と、それに収束する多様体の位相的關係が詳細に論じられている。先ずこの論文では、内半径崩壊する多様体の極限空間の次元は収束列の多様体の次元より小さくなり、通常の意味での崩壊をもたらすこと、また、極限空間が閉じた空間、例えば閉位相多様体、または閉じたアレクサンドロフ空間である場合、収束列は内半径崩壊すること、この意味で内半径崩壊は境界つき多様体の崩壊の典型例を与えることなどの考察が与えられている。そして本論文の主要部において、内半径崩壊の極限空間がアレクサンドロフ空間になることが示され、極限空間の構造が完全に決定された。次に、極限空間と崩壊多様体との位相的關係について論じられ、始めに、余次元1の内半径崩壊の場合、崩壊多様体に特異的区間ファイバー束の構造が入ることが示された。この場合、特異跡は、極限空間の境界に一致する。また極限空間が概正則である場合に、ファイバー束定理が得られている。ここでファイバーのタイプは、極限空間の形状により大きく二通りに分けられる。最後に、内半径崩壊する多様体の境界の連結成分の個数が高々2であり、境界が非連結であるとき、内半径崩壊多様体は、境界連結成分と区間の積に微分同相であることが証明されている。ここでは直径の有界性は仮定されていない。

## 審 査 の 要 旨

### 〔批評〕

Jeremy Wong 氏により、断面曲率が下に、境界の第2基本形式が両側に、そして直径が上に一様に有界であるような、境界つきコンパクト・リーマン多様体の族が、グロモフ・ハウストルフ距離に関してプレコンパクトであることが示され、この属における収束や崩壊現象の解明が自然な問題になる。Wong 氏による内半径崩壊に関する結果は幾つかあるものの、境界の第2基本形式が非負に近づいたり、断面曲率の上限を仮定したり技術的条件を要するものであった。本論文においては、Wong 氏の境界を延長する手法を更に展開して、延長部分の極限と多様体の極限の張り合わせ構造を解明することによって、内半径がゼロに収束するような内半径崩壊の極限空間の構造と、それに収束する多様体の位相的關係が、技術的条件を付加すること無しに、明らかになっている。もとより、本論文で示されているように、内半径崩壊は、境界つきリーマン多様体の崩壊の典型例を与えるものとして大変興味深い研究対象である。最初の定理では、内半径崩壊するリーマン多様体の極限空間がアレクサンドロフ空間であることが証明されている。これは極限空間の構造を決定するものとして大変興味深いものである。次に、極限空間と内半径崩壊多様体との位相的關係が論じられ、余次元1の内半径崩壊の場合に、内半径崩壊する多様体に特異的区間ファイバー束の構造が入ることが示されている。ここで特筆すべきことは、特異的区間ファイバー束の特異跡が極限空間の境界に一致することであり、その結果、境界の内部にどのような特異点が存在しても、ここでは特異ファイバーが発生しないことである。この部分の議論では、Perelman-Petrinin 両氏によって展開されたアレクサンドロフ空間の extremal subset に関する深い幾何学が用いられている。また極限空間が概正則である場合に、ファイバー束定理が得られている。証明のアイデアは、内半径崩壊多様体の延長のダブルをとり、山口孝男氏による同変ファイブレーション・キャッピング定理を適用することである。このファイバー束定理は、ファイバーのタイプが極限空間の形状により大きく二通りに分けられるなど、興味深い。最後に、直径の有界性を仮定することなしに、内半径崩壊する多様体の境界の連結成分の個数が高々2であり、境界が非連結であるとき、内半径崩壊多様体は、境界連結成分と区間の積に微分同相であることが証明されている。前半部分連結成分の個数に関する結果は、J. Wong 氏の論文で主張されているものの、その証明にはギャップが認められる。本論文では、内半径崩壊の詳細な研究により、別の観点からこの結果が正しいことを確認している。また後半部分の境界が非連結であるときの結果は、断面曲率の両側バウンドの下に、始め Gromov 氏により ICM78 の Proceeding において述べられたものを Alexander-Bishop 両氏が証明を与えたものである。本論文により、断面曲率の上限の条件が取り除かれたことになり、その価値は高いと認められる。

### 〔最終試験結果〕

平成28年2月15日、数理解物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

### 〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。