氏　　名	吳 达茹罕
学　位　の 種　類	博　士（　理学　）
学　位　記　番　号	博　甲　第　7634　号
学位授与年月日	平成 28 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審　査　研　究　科	数理物質科学研究科
学　位　論　文　題　目	

Hausdorff dimension of asymptotic self-similar sets
(漸近的自己相似集合のハウスドルフ次元)

主　　査	筑波大学准教授　理学博士　田崎博之
副　　査	筑波大学講師　　博士(数理学)　永野幸一
副　　査	筑波大学教授　　博士(理学)　井ノ口順一
副　　査	京都大学教授　　理学博士　山口孝男

論　文　の　要　旨

フラクタル幾何においては、自己相似集合や一般化されたカントール集合などの概念が重要な役割を果たしている。これまでの研究では、自己相似集合は、完備距離空間上の有限個の相似縮小写像から反復系という手続きによって、それらの不変集合として構成されている。Hutchinson 氏は、開集合条件という概念を導入することにより、ユークリッド空間における自己相似集合のハウスドルフ次元を決定した。その後、Balogh-Rohner 両氏は、Hutchinson 氏の結果を、ダブリング条件を満たす完備距離空間に拡張しているが、基本的にこれまでの反復系という手続きを踏襲している。もとより、自己相似集合は相似縮小写像を基に構成されるために、リーマン多様体をはじめとする曲がった空間では一般に構成できない。本論文では、この困難さを克服するために、まず、相似縮小写像を拡張する擬相似縮小写像の概念を定めて、擬相似縮小写像の成す無限系列としての漸近自己相似系を経由して、開集合条件を満たす漸近的自己相似集合という概念を創出して、そのハウスドルフ次元を決定している。こうして定まる漸近的自己相似集合は、概相似縮小写像を基に構成されるために、曲がった空間上に構成することが可能である。本論文では応用として、曲面上の凸領域上に、シルピンスキー・ガスケットを幾何学的に自然な方法で構成し、構成の基になる測地三角形が漸近的に非退化であるという仮定の下に、そのハウスドルフ次元を決定している。また曲面上の凸領域のある程度小さな測地三角形が漸近的に非退化になることや、曲面上の測地三角形が漸近的に非退化になるための必要十分条件が、その測地三角形が漸近的自己相似系を許容することであること、などが証明されている。本論文により、修士論文では解明されていなかった、漸近自己相似系の構成要素である基本部分集合達が境界で接するような場合にも、ハウスドルフ次元を決定することができるようになった。

審　査　の　要　旨

〔批評〕

これまでのフラクタル幾何学の研究では、自己相似集合は、完備距離空間上の有限個の相似縮小写像から反復系という手続きによって、それらの不変集合として構成されているため、リーマン多様体をはじめとする曲がった空間では一般に構成することは困難である。本論文では、この困難さを克服するために、まず、相似縮小写像の概念を拡張する擬相似縮小写像の概念を定めて、擬相似縮小写像の成す無限系列としての漸近自己相似系を経由して、開集合条件を満たす漸近的自己相似集合という概念を創出して、そのハウスドルフ次元を決定している。この主定理の証明では、これまで知られていた自己相似測度の構成を、漸近的自己相似測度の形に拡張して構成し、これまでの証明を一般化することにより為されている。この証明のアイデアは新しいもので評価できる。Balogh-Rohner 両氏は、相似縮小写像を一般化して、漸近的相似縮小写像の概念を定めて、相似縮小写像の反復系という手続きを、漸近的相似縮小写像の反復系という手続きに置き換えた場合に、何が起こるかを問題提起している。本論文で創出された漸近的相似系という概念は、Balogh-Rohner の意味の漸近的相似縮小写像の概念と密接に関係するものであり、この意味で主定理の結果は、Balogh-Rohner の問題に対して、別角度からの部分解を与えたものとも解釈できる。またこの主定理により、曲がった空間上に漸近的自己相似集合を構成し、そのハウスドルフ次元を計算することが可能となった。理論の適用範囲が大いに拡大した訳で、価値ある研究と認められる。実際、本論文では応用として、曲面上の凸領域上にシルピンスキー・ガスケットを幾何学的に自然な方法で構成し、そのハウスドルフ次元を決定している。その証明では、リーマン幾何におけるヤコビ場の長さに関する Rauch の比較定理や球面幾何、双曲幾何が随所で用いられ、測地三角形の角度や長さに関わる精密な評価が為されている。この研究により、曲面上のシルピンスキー・ガスケット以外にも、高次元の球面、双曲空間や一般のリーマン多様体上でフラクタル集合を考察できる可能性が開かれた。こうしてフラクタル幾何学の適用範囲が大きく広がる可能性がもたらされた点も評価できる。また本論文により、著者自身の修士論文では解明されていなかった、漸近自己相似系の構成要素である基本部分集合達が境界で互いに接するような場合にも、ハウスドルフ次元を決定することが可能になった点も大きな前進であると云える。

〔最終試験結果〕

平成28年2月15日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。