氏　　名	柴田 大樹
学 位 の 種 類	博 士 (理学)
学 位 記 番 号	博 甲 第　7633　号
学位授与年月日	平成28年　3月　25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審 査 研 究 科	数理物質科学研究科
学 位 論 文 題 目	Representations of Algebraic Supergroups (スーパー代数群の表現)
主　　査	筑波大学准教授　博士(数学)　増岡　彰
副　　査	筑波大学准教授　理学博士　藤田尚昌
副　　査	筑波大学教授　理学博士　森田　純
副　　査	筑波大学名誉教授　理学博士　木村達雄

論　　文　　の　　要　　旨

1950 年代以降 Grothendieck が代数幾何学にもたらした大変革は、代数群論にも及んだ。それは関手的見地に立つもので、可換環 k 上の可換代数の圏において定義された群関手こそが「群」であるとし、そのうち表現可能なものを (k 上の) アフィン群と呼ぶ。 これを表現する可換ホップ代数が有限生成のとき、これを (k 上の) 代数群と呼ぶ。 こうして従来 k が体の場合に論じられていた代数群が、可換環上、より一般的に論じられるようになった。 ルート・データと有理整数環 Z 上の分裂簡約代数群との1対1対応 (Grothendieck ら) に見るように、より自然かつ有用でありさえする。

近年スーパー・ストリング理論への興味から、スーパー幾何学が再び注目されるに至った。 k-加群全体が通常のテンソル積と自明な対称性によってなす対称テンソル圏は、位数2の群 Z/2Z により次数づけられた k-加群全体が、所謂スーパー・シンメトリーによってなす対称テンソル圏に一般化される。 前者における対象(例えばホップ代数)を一般化する後者における対象は、スーパー・ホップ代数のように、「スーパー」を冠して呼ばれる。 従ってスーパー代数群とは、可換なスーパー代数の圏上定義された群関手であって、有限生成スーパー・ホップ代数が表現するものをいう。 体上のスーパー代数群の表現はこれまでも多くの人々により研究されてきた。 それによるとスーパー代数群には、線形簡約なものがごく限られているというように、通常の代数群とは大きく異なる点があるにも関わらず、調和と混沌がデリケートに入り混じった興味深い対象である。 しかしその研究は個々のスーパー代数群についてなされ、包括的視点に欠けていたように思われる。

本論文の主たる成果は、

1) 可換環上のスーパー代数群に関する2つの構造定理―テンソル積分解定理(Theorem I.4.4.11)とハリシュ-チャンドラ対との圏同値(Theorem I.4.5.1)―を証明し、
2) それらを応用することで従来より包括的に、任意標数の体上の準簡約スーパー代数群について、その既約表現の構成と分類を行ったことである。

1)の2定理が示すところは、スーパー代数群の構造がそれに付随する i) 代数群 G_0 , ii) スーパー・リー代数の奇数部および iii) その上の Lie(G_0)-値対称双1次写像によって完全に決まるというもの。 これを可換環(特に Z)上証明することで、表現に関して 2)に記したような、基礎体の標数に依らない議論を可能にした。 これについてより詳しく述べる。 準簡約スーパー代数群とは、著者が Serganova のアイデアに基づき定義した概念で、おおよそスーパー代数群のうち、Z 上定義され、自然に付随する代数群が分裂簡約なるものをいう。 これは、所謂 Chevalley 型スーパー代数群を含む、十分に一般のスーパー代数群のクラスをなす。 G を準簡約スーパー代数群とする。これはスーパー・ボレル部分群 B を含み、この B からスーパー・トーラス T への自然な分裂全射 B → T が存在する。 まず T の既約表現が分類される (Corollary II.5.1.6)。 その全体は、T に付随する通常のトーラスの指標群 Λ を以てパラメタづけられ、u(λ), λ∈Λ の形で与えられる。 この各々を自然に B の表現と見て、その G への誘導表現を $H^0(\lambda)$ と書く。

Theorem II.5.3.1. $H^0(\lambda)\neq 0$ であれば $H^0(\lambda)$ は唯一の既約部分表現 L(λ) を含み、L(λ) 全体が 互いに非同型な G の既約表現のすべて (パリティ変換を除く) を与える。

こうして G の既約表現は、$H^0(\lambda)\neq 0$ なるλ全体からなる Λ の部分集合 Λ’でパラメタづけられた。 ある条件のもと、この Λ’ の簡潔な記述を与える次の結果を以て (その条件が満たされる場合に) 既約表現の分類が完成する。

Corollary II.6.2.4. G が著者が言うところの「際立ったスーパー放物型部分群」をもつ場合には、Λ’は G に付随する簡約代数群の支配的ウエイト全体の集合に一致する。

審　査　の　要　旨

〔批評〕

本論文は、スーパー代数群の表現の研究に、従来欠けていた包括的視点を与える、極めて優れてものである。 実際、著者はこの研究を包括的に行うべく、i) その拠り所となる、一般的性の高い2つの構造定理を証明した上で、ii)「準簡約スーパー代数群」という枠組みを設定し、iii) その既約表現の構成と分類を組織的に遂行した。 この一貫した研究成果は、著者の高い問題意識に基づくものであって、そのオリジナリティ豊かな方法と結果は今後、当該研究分野に大きな影響力を持つものと期待される。

以上により、本論文は博士論文として十分な内容を持つものと評価する。

〔最終試験結果〕

平成28年2月12日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。