

G. Polya の教育観に関する研究

数学科 倉井庸維

数学者で数学教育者として名高いポリアが、1969年に開催された数学教師対象の会議において行った基調講演「数学教育の基本的なアイデアと目標」の講演録をもとに、①教育目標、②指導方法と教師の役割について記述された箇所を抽出し検討している。その結果、①狭義と広義の教育目標の提示と実践との照合の重要性 ②問題解決を中心に一般的なタクティクスの習得と対話を用いた助産師方式が挙げられていることがわかった。

キーワード：ポリア、教育目標、問題解決、指導方法

1. はじめに

(1) 研究の目的

G. Polya (以後、ポリアとする) の教育観を明らかにすることを目的とする。ポリアは、1887年12月13日にハンガリーに生まれ、数学・数学教育の研究者として活躍し、1985年に98歳でアメリカで没した (Alexanders on, 2000)。ポリアは、数学者としての数々の業績がある一方で、1945年に出版された著書「いかにして問題を解くか」で、一躍世界上に有名になり、数学教育の父とまで呼ばれるようになった。数学教育研究の「問題解決」において、ポリアの名なしに研究することはできず、ポリアは、「問題解決」の巨人の一人であるといっても過言ではない。

そこで、彼の教育観、特に数学教育に関する考え方、教師像を明らかにすることを目的とする。

(2) 研究の方法：

ポリアは、1969年に4州の数学教育の合同会議に招待され、「数学教育の基本的なアイデアと目標」という題名で基調講演で発表している。その会議の参加者の大多数は、おそらく、初等中等学校における算数数学の教師であり、その教師らに対して、彼自身の数学教育に対する基本的な考え方を発表した論文が本論文であり、分析する意義はあると考える。そこで、その発表論文から、ポリアの一連の教育目標、内容、指導方法、教師の役割について記述された箇所を抽出し、検討する。

2. 学校の一般的な目標について

ポリアは、学校の役割として、まず「学校は、子どもが自活できるように、生活の糧を得られるようにすべきである。」としている。そのためには、まず、自分の身

の回りのことを、自分でできるように自立し、次に自分の所属しているコミュニティに適応できるようにならなければならないとしている。

原始的な社会であれば、家族や民族のメンバーとの接触によって、自然にコミュニティへの適応を学んでいくことができるが、社会システムが複雑になった現在において、学校の役割は大きくなったとしている。さらに、この社会の複雑化に伴い、多くの異なる仕事が増え、前もって自分に適した仕事を選ぶことは難しくなり、あらゆる可能性を知り、自分のまわりを取り巻く世界の知識や、一般的な教養も身に付けさせ、「ある特定の分野の知識や技能だけではなく、あらゆる面で子どもをできるだけ発達させなければならない。」とし、教育によって全人格の発達を促すとともに、その方法として、一般教養の必要性を説いているといえる。

3. 狭義の数学教育の目標について

ポリアは、学校を6歳から12歳までの生徒の通う初等学校と12歳から18歳までの生徒の通う中等学校に分け、それぞれの学校における狭義の数学教育の目標を挙げている。

初等教育の狭義目標として、非識字者では、現代社会において仕事に就くことはできないとし、それゆえに、すべての生徒に読み書き計算(3R's)を教えなければならないとし、さらに、初等教育における最低限の数学教育の内容として、①自然数の算術(四則演算)②長さ、面積、体積③分数、百分率の3つを挙げている。次に、中等教育の狭義の数学教育の目標として、「将来職業人(技能士、技術者、科学者、経営者)になるための専門的な準備」を挙げている。

そして、初等教育の目標に対しては、実践のさまざま

な場面において、算数を機械的に使うことが必要とされるために、速さと正確さが要求されるが、それだけにとどまらず、洞察的に教えなければならないとしている。洞察的に教えることによって、より速く結果を得ることができたり、応用の可能性や長期記憶の可能性があるとされている。洞察的に教えるとは、計算について機械的に指導し、その反復練習によって定着を図るだけでなく、子どもたちがその計算の原理や法則について根元的な理解が得られるように指導することであると、その結果として、計算方法を工夫することができ、そのことを洞察的 (insightfully) という言葉で表現したと思われる。事実、その後、学習の原理として、カントの言葉を引用しながら、直観から始まり、知覚、アイデアで終わると述べていることからわかる。

中等教育の数学教育に対しては、「数学は、将来のユーザーやある種の技術職に就く人にとっては必要不可欠であるが、子どもが中等学校へ入学した段階では、後に職業 (profession) 上の技術的な演習が必要か否かは分からないので、まずはすべての子どもに数学を教えるなければならない。しかし、将来技術者にならない大多数の人にとって入学後数年間の数学の勉強によって何の利益も得られないとしたら、悲しむべき事であり、それゆえに、我々は、彼らの将来の勉強や職業上に数学を使用する生徒だけでなく、利用しない生徒にとっても、何らかのメリットがあるように、中等学校においても数学を指導するためのより広い目的を見つけなければならない。」として、そこから、より広義の目標の設定へ向かう。

4. 一般的でより広義の教育目標

こうした自らの考えをもとに、ポリアは、学校における教育の一般的でより広義の目標、より高次の理想として、「個人と社会にとって有用であること (Serve the individual and the community)」と「子どもの内的世界を発達させる (Develop the inner resources of the child)」ことであるし、この目標に対する一般的な下位目標として、プラトンからの引用の一部として、以下のように挙げている。

一般的教養 General culture

精神の原理 Discipline of the mind

望ましい考え方の習慣 Desirable habits of thinking

精神と情緒の成熟 Mental and emotional maturity

バランスのとれた人格 A well balanced personality

そして、これらの理想を信じ、実現しようと学校において熱心に毎日の実践に移そうとするならば価値があるが、逆に、単なるスローガンで終わり毎日の実践に関わらなければ価値がないとしている。毎日の実践とは、カリキュラムの計画、次の授業の準備、宿題用の問題の選定の際に、それがより実践的で狭義の目標へ貢献するか否か、あるいは一般的な文化や精神的な原理のようなより広義の目標のいくつかに貢献するか否かを確認することが必要であるとしている。そのことによって、「その学習が何に役立つのか。」という子どもや親の質問に対して答えることができるだけでなく、自分自身をも満足させることができるため、自信を持って実践を行うことができるとしている。さらに、目標を高次の目標と狭義の実践的目標に分け、日々の教育実践をそれらの目標に照らし合わせ、目標に沿っているか否かを検討することを提唱していると思われる。

これは、我々教師は、教科書や学習指導要領に記載されているという理由だけからしばしば教育活動を行ってしまうが、「なぜこの内容を指導する必要があるのか」、この指導を通してどのような態度を育成するのか」といった自らの理想とする目標あるいはその下位の目標に照らし合わせて、常に学習内容を吟味することの重要性を述べていると思われる。教育とは、本来「合目的活動である」であり、目標が明確化されていなければならないが、ともすると忘れがちになる目標について、再考する機会を与えたと思われる。

また、この講演のテーマは「教育の科学化」であり当時いかに効率よく授業を行うかがテーマであったこともポリアの考えに影響していると思われる。

5. 学習の原理について

次に、ポリアの学習のプロセスと指導の方法について2つの原理を述べている。1つは、積極的な学習であり、もう1つは、連続的な段階である。

(1) 積極的な学習について

ポリアは、「学習は、受け身的ではなく、積極的 (能動的) であるべきである」とし、学習すべきことを「自分自身で発見しなければならない」としている。つまり、学習するとは、発見することであるとしているのである。この考え方の根底には、プラトンのアイデアがあるとし、教師は、生徒の発見を助ける、いわば「助産師」として行動すべきとしている。ここで、発見とは、いわゆる科学の発見ではなく、生徒自らが法則や定理を見いだ

すことであり、これらは教師が教え込もうとしても、学習することはできないとしている。「しかし、時間は限られており、新しいアイデアが生まれるのに時間がかかったり難しかったりするときは、待っていることはできない。さらに、我々は、人間の作った科学を高校生がすべて再発見することは期待できないので、多少の準備をしなければならない。つまり、与えられた状況の下でできるだけ生徒自身が発見できるようにすることである。」とし、教師自身が、周到に準備をすることが必要であるとしている。

(2) 連続的な段階 (consecutive phases)

次に学習の順番であるが、直観から始まり、知覚へ進み、最後はアイデアで終わるとするカントの『純粹理性批判』を理論的な根拠とし、ポリアは、学習の連続段階を、行為や知覚とともに始まり、そこから言葉や概念へ進み、望ましい精神的習慣で終わるべきであるとし、学習は経験から言葉、具体から抽象、体系化へと進むとしている。

算数・数学の学習においては、ともすると、抽象的な場面から始まることが多いが、体験・経験の重要性を指摘し、さらに、得られた知識をそれまでの学習してきた内容と体系化を図ることの重要性も指摘していると思われる。

6. 問題、問題解決、問題解決のタクティクスについて

その次に、ポリアは、自分の個人的な見解であると断りながら、「問題、問題解決、問題解決のタクティクス」について述べている。これは、まさにポリアのオリジナルであり、この論文の中心であろう。

(1) 問題解決について

ポリアは、最も良いと保証された指導の方法は科学的には存在しないが、良い先生がいる限り、よい指導方法も多くあるし、1つに限定することはできないとしながらも、共通点があるとし、それを以下のように記述している。

「数学について知るようになるということは、(情報を持つことではなく、) 数学することができるようになることを意味している。数学することは、数学的な言語を使用すること、未知数を求めること、証明をチェックすることなどである。それゆえに、数学を指導するためには、我々は、生徒が数学する機会を与えなければなら

ない。」

そして、数学するための方法の1つとして、問題解決は最も重要な数学的活動であるとしている。また、問題解決の重要性を、アメリカの著名な心理学者ウイリアム・ジェームズの言葉を引用し、権威づけてもいる。そして、すべての子どもが、正しいアプローチによりかなり早い段階から問題解決ができるような準備をすべきであると思うと述べ、新しい概念の枠組みをつけること、理論を構築すること、公理体系を構成することといった高次の数学的活動は、数学的な経験を前提としているが、それらは主として問題解決によって獲得されなければならないとしている。

それゆえに、数学のすべての教科書は、問題を含むことが正当化され、数学の教科書における問題は、最も本質的な内容であり、生徒による問題解決は、数学の教授の最も本質的な部分としている。しかし、ポリアは、その当時「問題解決」が、ある種のスローガンになってしまい、多義的になっていることが現状であるとし、ある種の問題を解くために一定の手続きを指導することを批判している。その例として、二次方程式を解くための解の公式の機械的な適用を挙げている。これは、通常演習として、定着を目的に行われることであり、公式を覚えるために、ある程度やむをえない側面がある。また、問題解決の過程で、二次方程式の解の公式を利用する場合もあり、二次方程式の解の公式の利用を否定することは、一概にできないと思われる。ポリアは、この点をどのように考えていたのであろうか。これからの課題である。すなわち、問題解決のためには、ある程度基礎的技術の習得が必要であり、その技術は、反復練習を行わなければならないのである。二次方程式の解の公式は、ポリアのいうように、直接社会に出たときに役に立つことではないが、その後の数学の学習のための「道具」として必要ではないかと思われる。

問題解決の取り組むことによって育成される望ましい精神の習慣として、秩序立てること (orderliness), 正確さ (precision), 集中する能力, 抽象的な概念を扱う能力などを挙げている。

(2) ルーチン問題とノンルーチン問題の違いについて

ポリアは、問題をルーチンとノンルーチンの2種類に分け、ルーチン問題とは、ねらいが限定されており、その問題によって特別の規則や手続き、定義を正しく使用することをねらった問題であり、ドリルと演習として提供され、発明や独創性は要求しない。二次方程式の解の

公式の適用問題がこれにあたる。反対に、ノンルーチン問題は、生徒の発明や独創性に挑戦し、より一般的で高次の目標を狙った問題である。ポリアは、ノンルーチン問題の使用を思慮深く使用すること (judicious) なしに、中等数学教育の高次の目標は達成できないと信じているとし、数学の問題は、どんな種類の問題を解く場合でも一般的に有効となりうる態度や手続き、すなわち、問題解決のタクティクスを生徒が習得できるように使用すべきであると述べている。

(3) 数学の授業における問題解決の指導について

ポリアは、数学の授業における問題解決の指導について、以下のように述べている。「あなた方は、生徒の間に広まっている悪い習慣を知っている。それは、問題を解かなければならないとき、特に、試験に見られるが、生徒は、提示された問題がどのようなものであるのかをきちんと認識することなしにすぐに計算や作図にとりかかってしまう。しかし、正しい態度は、全く正反対なのである。まず、問題を理解する。問題の主要部分を際立たせ、できるだけ明確にそれらを見ることである。その後、結果を見通すことを試みる。つまり、未知のものを見積もる易い方法があるのである。それから、計画を心に描き、その後、問題の詳細な部分に取りかかる。」

ポリアは、この方法は、初等的数学の問題に限らず、あらゆる分野に対してはるかに有用に役立つ態度であるが、数学の授業を通してより生徒の心に印象深く訴えることができるとし、この態度 (より注意深くそしてより詳細に例を用いて示されることによって) は、問題解決のタクティクスに属することになるとしている。

そして、古くから使用されてきた問題解決の手続き、「解析」を紹介している。「解析」とは、「逆向きにたどる」ことであり、結果や証明すべき結論、あるいは作図すべき図を「当然のこととして」始め、そこからいくつかの別の結論を導きながら与えられた仮説あるいはデータに到着するまで行う方法であり、ポリアによれば、古い幾何の教科書には、ほとんど載っていたそうである。この「逆向きにたどる」ことは、幾何学だけにかぎらず、さまざまな分野において、使用することが可能であるので、問題解決の指導において、このタクティクスを指導することを強く主張している。そして、この問題解決のタクティクスは、数学を卒業後も使用する生徒にとって、彼らの専門的な態度となり、数学を使用しない生徒にとっては、中等数学において後に残り、最も役に立つことであるかもしれないとしている。

最後に、ポリアは、まとめとして聴衆者である教師に向かって、何らかの哲学を持って、その哲学に照らし合わせて、日々の教育を実践することを希望すると結んでいる。

7. 最後に

ポリアは、一般的な教育の目標として、狭義の目標と広義の目標を設定していることがわかった。狭義の目標も、初等教育と中等教育とでは異なるが、初等教育の狭義目標として、非識字者では、すべての生徒に読み書き計算 (3 R's) を教えなければならないとしているとし、さらに、初等教育における最低限の数学教育の内容として、①自然数の算術 (四則演算) ②長さ、面積、体積③分数、百分率 の3つを挙げている。中等教育の狭義の数学教育の目標として、「将来職業人になるための専門的な準備 (技能士、技術者、科学者、経営者)」を挙げている。

広義の目標は、プラトンから引用し、「一般的教養 General culture」、「精神の原理 Discipline of the mind」、「望ましい考え方の習慣 Desirable habits of thinking」、「精神と情緒の成熟 Mental and emotional maturity」、「バランスのとれた人格 A well balanced personality」の習得や育成を挙げている。教師は、日々の実践をこれら目標と常に照らし合わせて検討すべきであると述べている。

また、指導方法については、問題を提示し、問題を解決することによって、考え方を習得していく方法をとっている。論文中では、ポリアは、考え方や態度をタクティクスと表現しているが、これは、問題に依存しない、広い範囲の問題に適用できる方法であると考えられる。

教師は問題を提示する際には、良い問題を提示する必要がある、良い問題とは、生徒の経験から理解できること、解法が限定されていないこと、これまでの学習に関連性があること、数学的な価値があり展望がもてること、タクティクスの習得に役立つことなどを挙げている。

さらに、指導方法は、対話形式によってなされ、教師は、生徒が自ら発見できるように手助けを行うべきであり、「助産師」役に徹しなければならないとしている。しかし、人類が、長い年月を掛けて習得してきたものを生徒が見いだすことは容易ではないため、教師の周到的な準備が必要であるとしている。学習の順序は、具体的な体験や経験から始め、次に言語や記号によって抽象的に表現し、最後にそれらを体系的にまとめるの段階へと進

めるべきであるとしている。

<参考文献>

Alexanderson, G. (2000). The Random Walks of George Polya, The Mathematical Association of America

Polya, G. (1969). Fundamental Ideas and Objectives of Mathematical Education, In Collected Papers, Vol. IV. Probability, Combinatorics, Teaching and Learning Mathematics, (ed. G. C. Rota), MIT Press, 569 - 578.