# 数学の教室における構成的活動に関する研究

## ～G.Polya の視点から～

数学科　倉 井 庸 維

ポリアの著作にみられる授業展開例を分析することによって、ポリアの理想とする授業形式を以下のように、まとめた。①問題解決の形式で授業は進めること②対話形式あるいはクラス討議の形式で行うこと③教師は、性急に解へ導くのではなく、辛抱強く生徒の内面からの自発的な活動を促す一般的な問いを発し、生徒自身によって解に到達するようにすること。

キーワード：G.Polya 、構成的活動、問題解決、授業展開

### 1．はじめに

#### 1.1　研究の目的と方法

数学の教室においていかにすれば構成的な活動を成立させることができるか、そのためには、教師はどのような手だてをする必要があるのかを明らかにすることが目的である。その前段階として、G. Polya（以後、ポリアとする）の提示した授業展開例をもとに、望ましい数学の授業について考察する。ポリアは、「いかにして問題を解くか」と「発見的解き方」の中で、彼が望ましいと考える授業展開例をいくつか示している。その例をもとに、望ましい授業、その時の教師の役割を明らかにする。

### 2．直方体の対角線を求める授業展開例

ポリア(1973)は、授業の「いかにして問題を解くか」の中で、示している授業展開例から見ていく。ポリアは、問題解決を問題の理解、計画、実行、見直しの４段階に分けているが、問題解決の授業展開も同じ段階で進むとし、まず、問題提示から始めている。

#### 2.1　問題の提示方法

【問題】

長さと幅と高さがわかっている直方体の対角線を求めよ。

提示方法として、問題を具体的にすると興味深くなるとし、教室を例にとり、各辺の長さを測ったり、目測したりすることができるとし、生徒は、教室の対角線を間接的に求める方法を考え出さなければならないとしている。

教師は、教室の長さと幅と高さを示し、対角線を手真似で書いて見せ、黒板の上に書いた図形を教室の例として示す。

それから、教師と生徒は、対話形式によって進められる。ポリアは、ソクラテス問答法が望ましいと考えていたようである。ポリアの展開例を示す。

#### 2.2　問題理解の段階

最初は、問題を理解する段階である。

教師：分からないものは何でしょう。
生徒：直方体の対角線の長さです。
教師：与えられているものは何ですか。
生徒：直方体の長さと幅と高さです。
教師：適当な記号をつけなさい。未知のものはどういう文字で表したらよいでしょう。
生徒：ｘです。
教師：長さと幅と高さにはどういう文字をつけますか。
生徒：ａ，ｂ，ｃ
教師：ａ，ｂ，ｃとχの間を結びつける条件は何ですか。
生徒：χは長さと幅と高さとがそれぞれａ，ｂ，ｃであるような直方体の対角線です。
教師：この問題は理にかなった，解くことのできる問題でしょうか。すなわち、未知数を決めるのに十分な条件がありますかということです。
生徒：はい、そうです。もし、ａ，ｂ，ｃが分かれば直方体は決まり、対角線も決まります。

#### 2.3　計画を立てる段階

次は、計画を立てる段階である。

教師：関連した問題を知っていますか？

生徒：・・・・・・・・・・

教師：未知のものに着目してください。同じような未知数を持った問題を知りませんか。

生徒：・・・・・・・・・・

教師：未知のものは何でしょう。

生徒：直方体の対角線です。

教師：未知のものが同じような、別の問題を知っていますか。

生徒：いいえ、直方体の対角線に関する問題はやったことがありません。

教師：未知のものが似ている問題を知りませんか。

生徒：・・・・・・・・・・・・

教師：さあ、対角線は線分です。直線の長さが未知のものであるような問題を解いた事がありませんか。

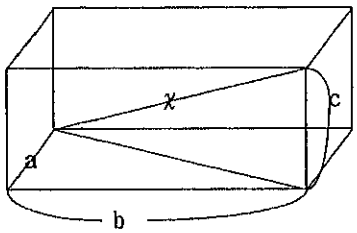
生徒：もちろん、あります。例えば、直角三角形の1辺を求めるというような。

教師：よろしい。これは、あなたが以前に解いた問題と関連しています。それを利用することができるでしょうか。

生徒：・・・・・・・・・・・・・

教師：現在の問題に関連した問題で既に解いたことのある問題を思い出すことができ、運がよかった。それを利用できるでしょうか。それを利用するために何か補助の要素を導き入れることができますか。

生徒：・・・・・・・・・・・・・




教師：ここを見てください。あなたが思い出した問題は三角形に関係があります。あなたの図の中に三角形がありますか。

or

図の中に三角形を見ることができますか。

or

まだ対角線は分からないが、三角形の斜辺を求めることができるといいましたね。では、どうしたらよいでしょうか。

or

もしも対角線が何かある三角形の斜辺であったなら、あなたは何を求める事ができますか。

等の暗示を与え、生徒が、三角形に陰影をつけたなら、見通しを得たものと考えてよいとし、ポリアは判断基準を述べている。

教師：三角形をかいたのは、良いアイディアだと思います。今、ここに三角形がありますが、この三角形で分からないのは何ですか。

生徒：分からないのは三角形の斜辺です。われわれは、それをピタゴラスの定理によって計算することができます。

教師：もしも直角をはさむ二辺が分かっていれば、できますね。しかし、それらは分かっていますか

生徒：一方は、与えられていて、それはcです。もう一方は、求めることは難しくありません。そうです、他方は、もう1つの直角三角形の斜辺になっています。

教師：大変よろしい。さあ、これであなたは、計画を完成させたと思います。

### 2.3　実行段階

生徒は計画を忘れなければ実行していくことができる。

$x^2 = y^2 + c^2$

$y^2 = a^2 + c^2$

したがって、補助の未知数yを消去することによって、

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

### 2.4　検討段階

実行段階で終わるが、ポリアは、解を検討することの重要性を述べ、解の検討方法として、「与えられたものは、すべて使用したか。」と問うことや高さcを減らし0とすると、直方体は、矩形になり、一方、平面上の対角線は、すでに学習済みであるので、正しいことが確認できる。これは、次元を下げることによるテストである。

## 3．教室の構成的活動に向けて

これらの例から、特徴としていえることは、まず教師は、自分のクラスに問題を出し、生徒は自分自身で問題に取り組み、そこから学び取るようにしていることであり、問題はクラス討議で解かれるべきであるとしている。そして、教師は、この状況において、注意深く生徒を援

助することが必要であるが、教師の援助が少ないと、全然進歩がなく、教師が援助しすぎると、生徒が自分自身の問題解決への取り組みから学ぶ機会が全然ない。この二律背反をいかに調整するかという問題に対して、ポリアは、質問の仕方を工夫することを提案し、質問を良い質問と悪い質問に分けているのである。

良い質問とは、内容にできるだけ依存しない問いを発していることであるとし、ポリア(1965)は、それを内部援助とよんでいる。逆に、悪い質問は、上記の問題において、ピタゴラスの定理を使用することを生徒に分からせてしまう質問である。この質問は、簡潔であるが、この問題に対して固有であり、応用が利かないとし、それを外部援助の質問としている。

内部援助の質問を行うことによって、展開は非常に遅くなるが、教師は忍耐強く、生徒自身が見出す、すなわち、構成することを援助し続けるのであるという。ここで、すぐに「直角三角形ＡＢＣにピタグラスの定理を適用しなさい」と言うことも可能であるが、内部援助による質問により、生徒が自分自身の力で何物かを解答に寄与する機会を外部援助の質問を受けるよりも、より多く提供しているとしている。

さらに、度々内容に依存しない内部援助の質問を受けることによって、生徒自身の心の中で浮かべることができ、他の様々な問題に対しても、用いることができるとしているが、それに対して、外部援助は、この特定な問題に対してのみ有効であり、一般的なアイディアではないため、応用が限定されているとしている。そのため、内部援助を出し尽くした場合や時間的なゆとりがない場合のみ、外部援助を行うべきであるとしている。

つまり、教師は、できる限り生徒に対しては、内部援助を行うべきであるとし、内部援助を続けることにより、生徒自身が自分で内部援助の質問を発することができるようになるとしている。このことは、現代の言葉でいえば、メタ認知のモニター機能であるといえる。

では、内部援助を与えるための「決まり文句」として、ポリアは、どのような質問を考えていたのだろうか。ポリアは、以下のように場面、問題によってすべき質問のリストを挙げているが、機械的に使用すべきではなく、それぞれの状況に応じて使用すべきであるとしている。

質問のリスト

○目標を焦点にあわせる場合

・求めるものは何か？
・未知数は何か？
・結論は何か？
・手元にあるものは何か？
・すでに得られたものは何か？

問題の解を求める決定問題の場合

・未知数は何か？
・データは何か？
・条件は何か？

証明問題の場合

・結論は何か？
・仮定は何か？

○見込みを評価する場合

絶望的な場合

・この問題には答えがあるのか？
・解は、１つか、あるいは、いくつかの解があるか、それとも解は全然ないのか？

証明問題の場合

・定理は真か偽か？
・定理は真か？
・終結を含むためには、もっと強い仮定が必要か？
・定理はきびしいか？
・結論を含むためには、もっと弱い仮定で十分か？

○問題解決に実際に取りかかる場面

・それはどんな種類の問題か？
・それは何か既知の問題と関係があるか？
・それは何か既知の問題に似ているか？
・関連問題を知っているか？
・関連問題を想像できないだろうか？
・同種類の問題、あるいは類似な問題、あるいはもっと一般的な問題、あるいはもっと特殊な問題を知っているか、あるいは想像できないのだろうか？

## 4．最後に

ポリアの理想とする授業展開を、ポリアの主張にそって、分析してきた。ここから、多くのことがまとめられる。

①問題解決の形式で授業は進めること
②対話形式あるいはクラス討議の形式で行う。
③教師は、性急に解へ導くのではなく、辛抱強く生徒の内面からの自発的な活動を促す一般的な問いを発し、生徒自身によって解に到達するようにすること。

今後の課題は、これらを実践していき、生徒の内的な活動を促すことができるかどうかである。

<引用文献>

Polya G. (1965). Mathematical Discovery : On understanding, Learning, and teaching problem solving, Volume 2, Tohn Wiley & Sons, Inc.

Polya G. (1973). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method Second Edition, Princeton