図　形　と　方　程　式

実験テキスト　A. N. 1

（ベ　ク　ト　ル）

報告者　長　野　　　東

目　　次

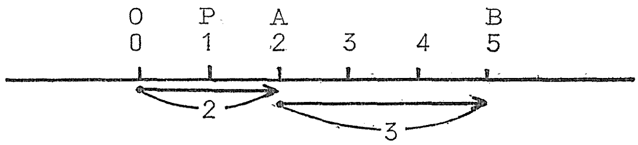
§1. 直線上の点

1° 数の計算とベクトル

数の計算を図示することができれば，直観的にも便利である。そこで，かんたんなものから考えてみよう。たとえば，

$$2+3=5$$

は，下図のように，直線上で，0の点から右へ2,



さらに3だけ移動して，5の位置になったということを示している。

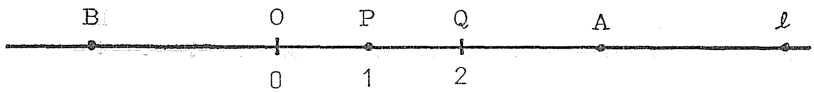
$$OA+AB=OB$$

でOBがOPの5倍になっているので，Bの位置に数5を対応させるのである。

このように，数の加法，減法を数直線上の点の移動として考えることができる。

ここで，数直線上の点の移動を考えると，移動量には，方向と大きさという，二つの要素が必要であることがわかる。

方向と大きさという二つの要素をもった量のことをベクトルという。



たとえば，上図のように，直線上に相異なる2点O，Pをとると，OからPへの方向と線分OPの長さがきまる。

OからPへの方向を＋（プラス）

線分OPの長さを1と約束すると，OからPへの点の移動はベクトルとなる。

これを記号で，$\overrightarrow{OP}$とあらわす。$\overrightarrow{OP}$の大きさは$|\overrightarrow{OP}|$と書き，$\overrightarrow{OP}$の大きさ，または絶対値といい，Oを始点，Pを終点という。

ここでは，$|\overrightarrow{OP}|=1$である。方向は，PからOへの点の移動はまた，ベクトルと考えられるが，$\overrightarrow{OP}$と反対方向だから＋に対して－とする。すなわち，

$$\overrightarrow{PO}=-\overrightarrow{OP}$$

$$|\overrightarrow{PO}|=1$$

である。同一直線上で方向が＋と－の二通りがあるので，今後，方向という用語は「直線の方向」という場合に用いて，平行とか垂直などを考えるとき，方向が等しいとか，等しくないとかいうことにする。ベクトルの場合は方向と区別するために，「向き」という用語を用い，$\overrightarrow{OP}$の向きと$\overrightarrow{PO}$の向きは逆であるというように用いる。

$\overrightarrow{OP}$ を用いると，同一直線 l 上にある点 Q が，$\overline{OQ}=2\overline{OP}$ で，向きが $\overrightarrow{OP}$ と同じであれば $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$ と表わすことができる。点 B が点 O に対して，点 Q と対称な点にあれば，$\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OB}$ は向きは逆で，大きさは等しくなる。したがって，

$$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OP}$$

とあらわすことができる。このことより，一般に直線 l 上の任意の点 A をとると，

$$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OP}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

とあらわすことができる実数 x がただ一つ存在することがわかる。

（問 1） 直線 l 上で①をみたす x がただ一つ存在することをがいえるための条件は何か。

①の式が一意にきまることによって，つぎのような対応関係が存在する。

直線 l 上に 2 点 O，P をとると

l 上の点 A $\rightleftarrows$ $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OP}$ $\rightleftarrows$ x

の位置　　　　　　　　　　　　（実数）

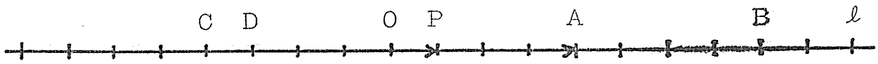
この対応が 1 対 1 対応であることを用いることによって，

$\overrightarrow{OA}\rightleftarrows x$（実数）

であるから $\overrightarrow{OA}=(x)$ と表わして，$\overrightarrow{OA}$ の成分は x であるという。

このような表わし方を $\overrightarrow{OA}$ の成分表示という。成分表示は次のような二つの意味をもっている。

I．変　位



上図のように点をとると，

$\overrightarrow{OA}=4\overrightarrow{OP}$ となるが，$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{CO}=4\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{DP}=4\overrightarrow{OP}$

となる。すなわち，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DP}$ は $\overrightarrow{OP}$ と向きが同じで，大きさは $|\overrightarrow{OP}|$ の 4 倍であるから，上の等式が成り立つ。

したがって，

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DP}=(4)$

となる。このことより，ベクトルの成分表示（4）という意味は $\overrightarrow{OP}$ と同じ向き（+）に $|\overrightarrow{OP}|$ の 4 倍だけ，点の移動する量を示すことがわかる。これを変位という。

したがって，(x) であらわされるベクトルは無限にあることがわかる。

（問 2）

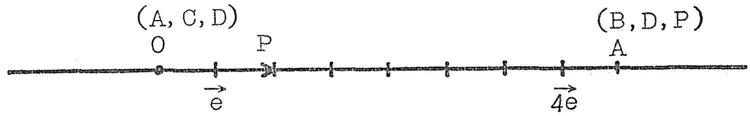
上の図を用いて，次のベクトルの成分表示を求めよ。

$\overrightarrow{CD}$,　$\overrightarrow{OD}$,　$\overrightarrow{BA}$,　$\overrightarrow{PA}$,　$\overrightarrow{CB}$,　$\overrightarrow{BO}$,　$\overrightarrow{AC}$,　$\overrightarrow{AA}$

（註） このようなベクトルを自由ベクトルという・始点が変れば同じ成分をもっても終点が異なるベクトルである。

Ⅱ. 座　標

Ⅰ. で示したベクトルの成分表示の変位が等しい $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DP}$ は成分 (4) である。これらのベクトルの始点を原点 O へ重ねると終点は全て一点に重なる。



したがって，図のように，$|\vec{e}|=1$，向きを正とするベクトル $\vec{e}$ (基本ベクトルという) をとると，

点 A の位置 $\Longleftrightarrow \overrightarrow{OA}=4\vec{e} \Longleftrightarrow (4)$

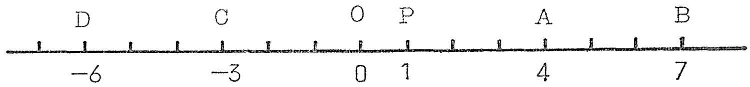
となり，基本ベクトル $\vec{e}$ をきめれば，点 A の位置と成分とが 1 対 1 対応するので，成分を点 A の座標と考えることができる。ここで，

Ⅱの変位を示す自由ベクトルに対して，始点をすべて原点にするベクトルを位置ベクトルという。このことより，ベクトルの成分は

$$\text{成分}(x)\quad \begin{cases} \overrightarrow{PQ}=(x) & \text{変位} \\ A=(x) & \text{座標} \end{cases}$$

の 2 通りの意味をもつことがわかる。この 2 通りの意味を自由に使うことが必要である。

(問 3)



上の数直線を用いて，次のベクトルの成分表示をせよ。つぎに，X, Y, Z, W の位置を図示せよ。

(1) $\overrightarrow{AB}=$　　$\overrightarrow{BP}=$　　$\overrightarrow{DC}=$

　$\overrightarrow{OC}=$　　$\overrightarrow{CA}=$　　$\overrightarrow{OB}=$

　$\overrightarrow{OA}=$　　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$　　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=$

(2) $\overrightarrow{AX}=(2)$　　$\overrightarrow{BY}=(-5)$

　$\overrightarrow{CZ}=(7)$　　$\overrightarrow{PW}=(-3)$

(問 4) 点 A, B, C の座標をそれぞれ，(a), (b), (c) とするとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ の成分表示をせよ。

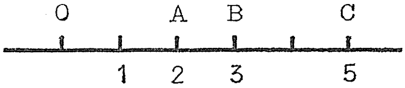
(2) 成分表示を用いて，次の等式を証明せよ。

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AB}$$

2° ベクトルの性質

ベクトル $\overrightarrow{OA}=(2)$, $\overrightarrow{OB}=(3)$ であるとき，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2)+(3)=\overrightarrow{OC}$

となり，$\overrightarrow{OC}=(5)$ であるから，ベクトル



の加法をこれによって，定義をする。この場合では

$$(2)+(3)=(5)$$

と表わすことができる。

〔加法の定義〕

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(x)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(y)$ と表わすと，ベクトルの加法は，$(x)+(y)=(x+y)$ と定義する。

〔相等の定義〕

2つのベクトル $\vec{a}=(x)$ と $\vec{b}=(y)$ が等しいということは

$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow (x)=(y) \Longleftrightarrow x=y$

すなわち，成分が等しいとき，ベクトルは等しいと定義する。

このように，定義すると，加法に関して，次の性質が成り立つ。

V. 1　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　交換法則

V. 2　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　　結合法則

V. 3　任意のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，

$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ をみたす $\vec{x}$ がただ一つ存在する。

このような $\vec{x}$ を $\vec{b}-\vec{a}$ と書く。

（問 1）

$\vec{a}=(a)$，$\vec{b}=(b)$ として，V. 1，V. 2 を証明せよ。

（問 2）

V 3 を用いて，次の等式の成り立つことを証明せよ。

① $\vec{a}+\vec{x}=\vec{a}$

をみたす $\vec{x}$ がただ一つ存在する。このベクトルを $\vec{0}$（零ベクトル）と定義する。

② $\vec{a}+\vec{y}=\vec{0}$

をみたす $\vec{y}$ がただ一つ存在する。このベクトルを $\vec{a}$ の逆ベクトルといい，$-\vec{a}$ とかく。

（問 3）

V. 1～V. 3 を用いて，次の等式を証明せよ。

① $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

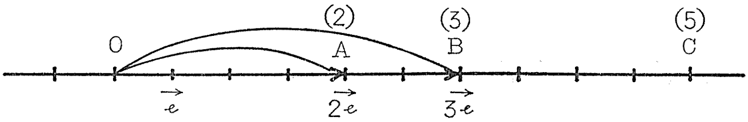
② $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

③ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$

前節でのべた数の計算 $2+3=5$ において，ベクトルの成分表示で考えるならば，

$(2)+(3)=(5)$…………………………①

となるが，この成分表示を基本ベクトル $\vec{e}$ を用いてあらわせば，



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ であるから

$(2)=\overrightarrow{OA}=2\vec{e}$,　$(3)=\overrightarrow{OB}=3\vec{e}$

$(5)=\overrightarrow{OC}=5\vec{e}$ と表わすと，

左辺$=(2)+(3)=2\vec{e}+3\vec{e}$

右辺$=(5)=5\vec{e}$

よって，$2\vec{e}+3\vec{e}=5\vec{e}$ が成り立つ。これは $(2+3)\vec{e}=5\vec{e}$ と推論でき，さらに，一般化すると，ベクトルの実数倍について次のような性質が成り立つ。

ベクトルの実数倍

k, l, 1 を実数，$\vec{a}$, $\vec{b}$ をベクトル，

$k(x)=(kx)$ と定義すると次の等式が成り立つ。

V. 4　$k(l\vec{a})=kl\vec{a}$　　（結合法則）

V. 5　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　（分配法則）

V. 6　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　　（分配法則）

V. 7　$1\vec{a}=\vec{a}$

（問 4）

$\vec{a}=(a)$, $\vec{b}=(b)$, $k=2$, $l=-3$ として V.4〜V.6 の成り立つことをたしかめよ。

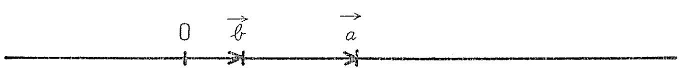
（問 5）

下図のベクトルを図示せよ。

（1）

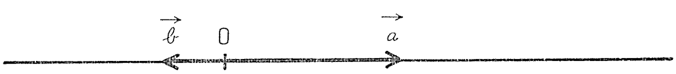
$2\vec{a}$,　$-3\vec{a}$,　$2\times(-3)\vec{a}$

（2）



$2(\vec{a}+\vec{b})$,　$2\vec{a}+2\vec{b}$,　$2\vec{a}-\vec{b}$

（3）



$k\vec{a}(0\leqq k\leqq 1)$

$k\vec{a}+b(1\leqq k\leqq 2)$

$-2\vec{a}+k\vec{b}(k\geqq 2)$

（問 4）

V.4〜V.7 を用いて，次の等式の成り立つことを証明せよ。

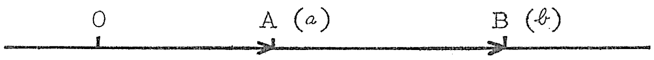
（1） $k(\vec{b}-\vec{a})=k\vec{b}-k\vec{a}$

（2） $k=0$ か $\vec{a}=\vec{0}$ ならば $k\vec{a}=\vec{0}$ である。

3° ベクトルの応用

（1） 2点を結ぶベクトル

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



2点 A，B を結ぶベクトルは $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$ と2通りあるが，それを成分（座標）を用いて表わすと，つぎのようになる。

前節 V.3 により，$\overrightarrow{AB}$ は，O を原点として，

$$\overrightarrow{OA}+\vec{x}=\overrightarrow{OB}$$

をみたす，$\vec{x}$ として求められる。よって，

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

となる。また，

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

と考えればよい。これを成分表示すれば，

$\overrightarrow{OA}=(a)$，$\overrightarrow{OB}=(b)$ として，

$$-\overrightarrow{OA}=-(a)=(-a)$$

だから，

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b)-(a)=(b)+(-a)=(b-a)$$

と書ける。また，

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-(b-a)=(a-b)$$

となる。

$\overrightarrow{AB}$ の大きさは $|\overrightarrow{AB}|=|b-a|$

向きは，　$b-a>0$ ならば正の向き

　　　　　$b-a<0$ ならば負の向き

となる。$b-a=0$ ならば $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ となる。

（問 1）

次の2点を結ぶベクトルの大きさを求めよ。

（1） A(5)，B(7)　（2） A(0)，B(−3)　（3） A(−3)，B(−7)

（4） T(5)，S(−3)　（5） C(−4)，D(4)　（6） A(8)，B(8)

(問 2)　次のベクトルのうち等しいものはどれか。

(1)　A(3), B(2) のとき, $\overrightarrow{AB}$

(2)　C(5), D(7) のとき, $\overrightarrow{CD}$

(3)　H(−4), I(2) のとき, $\overrightarrow{HI}$

(4)　L(−9), M(−8) のとき, $\overrightarrow{LM}$

(5)　P(1), Q(14) のとき, $\overrightarrow{PQ}$

(6)　V(5), W(−8) のとき, $\overrightarrow{VW}$

(問 3)

次の条件をみたす点 B の座標を求めよ。

(1)　A(5), $\overrightarrow{AB}=(-7)$ のとき

(2)　A(7), $\overrightarrow{AB}=(3)$ のとき

(3)　A(−3), $\overrightarrow{AB}=(-5)$ のとき

(4)　A(x), $\overrightarrow{AB}=(y-x)$ のとき

(5)　A(a), $\overrightarrow{BA}=(b)$ のとき

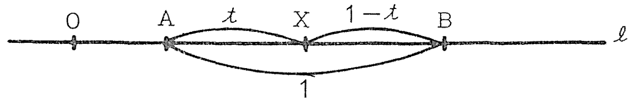
(問 4)

A, B, C が一直線上の任意の点であるとき,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

であることを証明せよ。

Ⅱ.　分点の座標



直線 l 上に点 A, B, X をとると，A, B を定点とすれば，$\overrightarrow{AX}=t\,\overrightarrow{AB}$ をみたす実数 t の値が点 X に対して，1対1に対応する。

このことより，点 X の座標 (x) は次のように表わされる。A(a), B(b), O(0) とすると

$$\overrightarrow{AX}=t\,\overrightarrow{AB}\cdots\cdots\text{①}$$

$$\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t\,(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}-t\,\overrightarrow{OA}$$

$$=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

よって,

$$(x)=(1-t)(a)+t(b)$$

$$=((1-t)a+tb)$$

したがって,

$$x=(1-t)a+tb\cdots\cdots\text{②}$$

となる。

②の式を点 X の座標 (x) のパラメーター表示という。この表示によって，a，b が定数であれば，x と t が１対１に対応していることも容易に判るであろう。

②の式は次のように表わすときもある。

$1-t=k,\quad t=l$ とおくと

$x=ka+lb$ かつ $k+l=1$ ………………③

以上のように，②，③の等式は，点 X が２点 A，B を結ぶ直線上にあれば，点 X，A，B の座標がみたすべき条件を示している。

逆に，②，③が成り立てば，点 X は直線 AB 上にあることは次のようにしていえる。

②より

$$x=(1-t)a+tb$$

$$(x)=(1-t)(a)+t(b)$$

$$=(a)+t(b-a)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

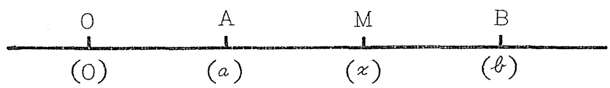
ゆえに，

$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ただし，t は実数

となり，点 X は直線 AB 上にあることがいえた。このことを用いると，点 X の位置が特別な場合の座標も容易に求められる。たとえば，

２等分点（中点）

M が AB の中点である場合，



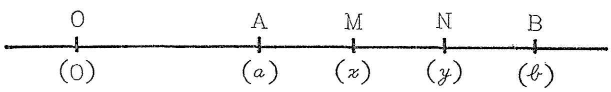
$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，

②の式で $t=\dfrac{1}{2}$ と考えればよい。したがって，

$x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b=\dfrac{a+b}{2}$ （中点の座標）

となる。

３等分点



上図のように，M，N が線分 AB の３等分点であるとき，

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

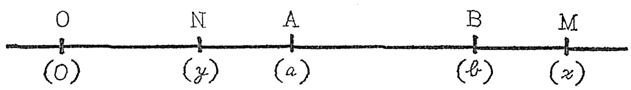
となるから，$t=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$ を②式へ代入すれば

$$x=\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a=\frac{b+2a}{3}$$

$$y=\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a=\frac{2b+a}{3}$$

となる。

つぎに，点 X が線分 AB の外分点になった場合を考えると，



点 M は AM : BM=3 : 1 に外分し，点 N は AN : NB=1 : 3 に外分する。この場合比にも符号をつけて考えると，

$$\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=3:(-1)$$

$$\overrightarrow{AN}:\overrightarrow{NB}=(-1):3$$

というように表わせる。これを用いると，

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AN}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$

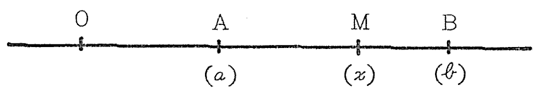
となり，②の式で $t=\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$ とおくと，

$$x=\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}a=\frac{3b-a}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}a=\frac{-b+3a}{2}$$

というように表わすことができる。

以上のことより，線分 AB を $m:n$ に内分あるいは外分する点 M の座標は次のようにして求めることができる。



$$\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=m:n$$

m，n の符号は $\overrightarrow{AB}$ の向きを正の向きとしてきめる。

$$\overrightarrow{AM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

となるから $t=\frac{m}{m+n}$ とおくと，

$$(x)=\frac{m}{m+n}(b)+\left(1-\frac{m}{m+n}\right)(a)$$

$$\therefore\quad x=\frac{mb}{m+n}+\frac{na}{m+n}$$

$$x=\frac{mb+na}{m+n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

となる。($m+n\fallingdotseq 0$ とする。)

(問 5)

線分 AB の分点の座標を求める公式③において，A，B の順序が本文と逆になった場合 AM：MB$=m:n$ に分ける点 M の座標 (x) はどうなるか。

(問 6)

A(-2)，B(3) のとき，線分 AB を 3：2 に内分，または外分する点の座標を求めよ。

(問 7)

分点の座標を求める公式③において，分母$=m+n=0$ となるとき，点 M は線分 AB に対して，どんな位置に存在するかをしらべよ。また，$m>n$，$m<n$ のとき，点 M の存在範囲を図示せよ。

§2. 平面上のベクトル

1° 成分表示

平面上の点の移動も移動の向きと大きさをもつからベクトルと考えることができる。このベクトルを数量的に表現するために，座標軸を用いる。

下図のように，A から B までの点の移動を $\overrightarrow{AB}$ とすると，点 A，B の x 軸，y 軸への正射影(垂線を下した足)をそれぞれ，A′，A″，B′，B″ とすると，A′，B′ は x 軸上の点であるから，前節より，$\overrightarrow{A'B'}$ の成分表示ができる。

これを右図のように座標できめれば，

$\overrightarrow{A'B'}=(b_1-a_1)$

同様にして，

$\overrightarrow{A''B''}=(b_2-a_2)$ となる。このことを用いて，$\overrightarrow{AB}$ の成分表示を次のように定義する。

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\ b_2-a_2\end{pmatrix}$$

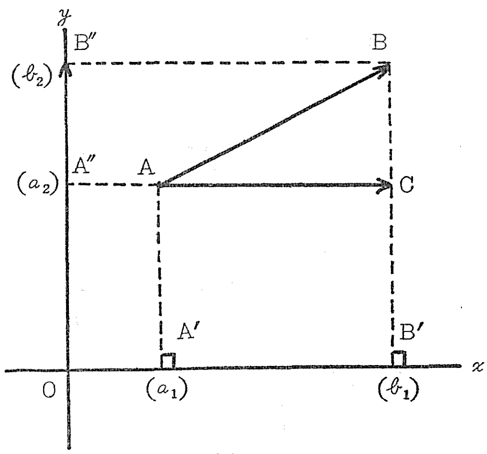


図 1

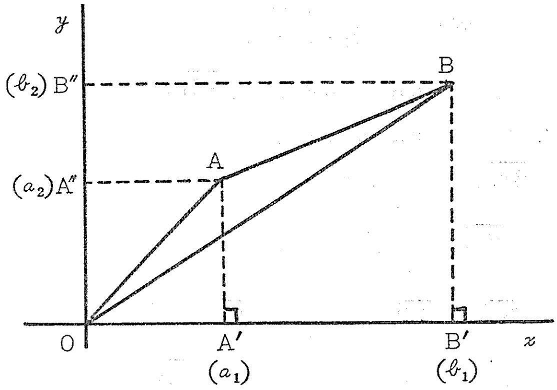
このように，平面上のベクトル $\overrightarrow{AB}$ を 2 個の実数の組として表わす。上の数を第一成分または x 成分，下の数を第 2 成分または y 成分という。この表現は点 A，B の位置と，(A′，A″，B′，B″) が 1 対 1 対応であるから x 軸，y 軸上の基本ベクトルを定めれば，成分表示は一意にきまる。

図 1 において，始点を原点においた位置ベクトルを考えると，

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a_1-0\\a_2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}b_1-0\\b_2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

となる。



直線上のベクトルと同様にして，始点を原点Oに重ねたとき終点の位置は，成分と１対１対応をするので，$\overrightarrow{OA}$ の成分

$\Longleftrightarrow$ 点 A の座標

というように対応させて，成分表示を座標と同一視することができる。

このことより，２点 A，B の座標がわかれば，$\overrightarrow{AB}$ の成分表示をすることができる。

(問 1)

次のベクトルを成分表示せよ。

$A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$　　$C=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$　　$D=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

のとき，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$

このようにベクトルの成分表示をしたときベクトルの大きさと向きを次のように定める。まず，$\overrightarrow{AB}$ の大きさは，$|\overrightarrow{AB}|$ と書き，

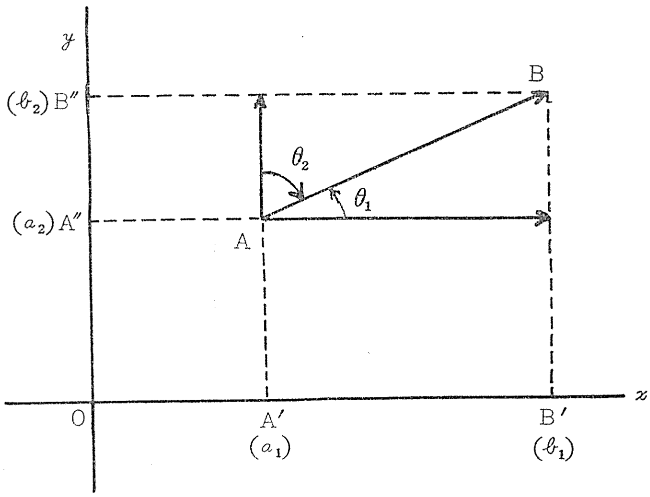
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

と定義する。

さらに，$\overrightarrow{AB}$ の向きは，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{Ox}$ のなす角 θ_1，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{Oy}$ のなす角 θ_2 ときめれば，

(左図参照)



$$\cos\theta_1=\frac{b_1-a_1}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$
$$\cos\theta_2=\frac{b_2-a_2}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

と定義し，$(\cos\theta_1,\ \cos\theta_2)$ を $\overrightarrow{AB}$ の方向余弦という。このように，平面上のベクトルの向きは，2つの実数 $\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$ の組みであらわす。

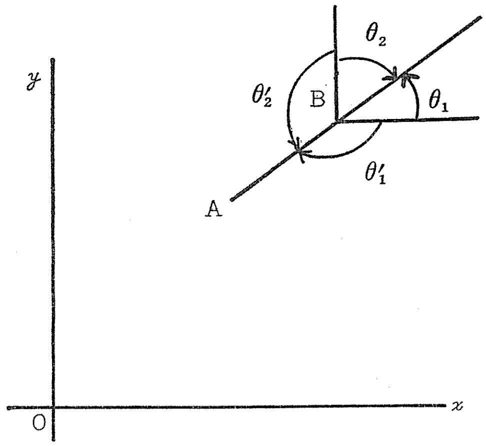
$\overrightarrow{BA}$ についていえば，

$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$ であるから，

$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$ となるが，$\overrightarrow{BA}$の向きは，下図のように，$\overrightarrow{BA}$ と x 軸，y 軸の正の向きとのなす角 θ_1'，θ_2' である。したがって，$\overrightarrow{AB}$ と x 軸，y 軸の正の向きとのなす角を θ_1，θ_2 とすれば，

$|\theta_1-\theta_1'|=\pi$,　　$|\theta_2-\theta_2'|=\pi$

の関係にある。



よって，$\overrightarrow{BA}$ の向きは

$\cos\theta_1'=\cos(\pi\pm\theta_1)=-\cos\theta_1$

$\cos\theta_2'=\cos(\pi\pm\theta_2)=-\cos\theta_2$

となり，

方向余弦は

$(\cos\theta_1',\ \cos\theta_2')=(-\cos\theta_1,\ -\cos\theta_2)$ となる。

このことより，

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

であることが成分のうえでも，向きと大きさの関係からも明らかにされたのである。

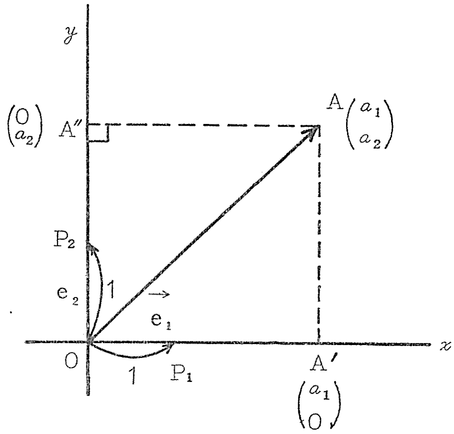
（問 2）

（問 1）で求めたベクトルの大きさと向き（方向余弦）を求めよ。

（問 3）

x 軸上，y 軸上のベクトルの向きはどのように表わせばよいか。

いままで，平面上の点の座標については，既知のこととして，すすめてきたが，これは，$\overrightarrow{OA}$ の成分を x 軸，y 軸への正射影の数の組として考えたのである。ここで，基本ベクトルを用いて，表わすことを考えよう。



平面上に直交する2直線を引いて，その交点をOとし，原点Oと呼び，一方の直線を x 軸

他方の直線を y 軸と呼ぶ。x 軸上に任意の点 P_1 をとり，$\overrightarrow{OP_1}$ の向きを x 軸の正の向き，$|\overrightarrow{OP_1}|$ を単位の長さ1とする。さらに，$\overrightarrow{OP_1}$ の向きに対して，時計の逆の廻り方の向きに y 軸上に $|\overrightarrow{OP_2}|=1$ となるように点 P_2 をとると，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ は x 軸，y 軸上の基本ベクトルとなる。$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ の x 軸，y 軸上への正射影はそれぞれ，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ であるから，成分表示は

$$\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となる。定義により，大きさは

$$|\overrightarrow{OP_1}|=1, \qquad |\overrightarrow{OP_2}|=1$$

となり，向きは，

$\overrightarrow{OP_1}$ の方向余弦は $\left(\cos 0,\ \cos\frac{\pi}{2}\right)=(1,\ 0)$

$\overrightarrow{OP_2}$ の方向余弦は $\left(\cos\frac{\pi}{2},\ \cos 0\right)=(0,\ 1)$

となる。

このような基本ベクトルを $\overrightarrow{OP_1}=\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OP_2}=\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすれば，前節より，x 軸上の任意の点 A' は $\overrightarrow{OA'}=a_1\vec{e_1}$ となる実数 a_1 が一意にきまる。y 軸上においても同様に，$\overrightarrow{OA''}=a_2\vec{e_2}$ となる実数 a_2 が一意にきまることがいえる。

このことより，点 A' の座標をいままでは (a_1) と書いたが正しくは，

$\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix}$ と書くべきである。すなわち，

$OA_1=\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix} \qquad a_1\vec{e_1}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ となり

$$\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix}=a_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

が成り立つことが必要である。同様にして，$\overrightarrow{OA''}=\begin{pmatrix}0\\a_2\end{pmatrix}$ だから，$a_2\vec{e_2}=a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

より，

$$\begin{pmatrix}0\\a_2\end{pmatrix}=a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

が成り立つことが必要である。さらに，

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

であるから，以上のことより

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つと，

$$\overrightarrow{OA}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

と表わされる。④の等式を平面上のベクトルが2個の基本ベクトルの一次結合で表わされた式と

いう。

(註)　直線上の任意のベクトルは,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e}$$

と表わされることがいえたのと比べると直線と平面の特徴がわかる。

2°　ベクトルの演算

前節末の推論より，平面上のベクトルの演算を次のように定義する。

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$　　$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　とすると,

〔相等の定義〕

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$

〔加法の定義〕

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$$

以上の定義を用いると，次の性質が成り立つ。

V. 1　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　交換法則

V. 2　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　　結合法則

V. 3　任意のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ をみたす $\vec{x}$ がただ一つ存在する。

このような $\vec{x}$ を $\vec{b}-\vec{a}$ と書く。

(問 1)

V. 1，V. 2 を定義にしたがって，証明せよ。

(問 2)

V. 3 を用いて，次の等式の成り立つことを証明せよ。

① $\vec{a}+\vec{x}=\vec{a}$

をみたす $\vec{x}$ がただ一つ存在する。このベクトルを $\vec{0}$（零ベクトル）という。

(加法の単位元である。)

② $\vec{a}+\vec{y}=\vec{0}$

をみたす $\vec{y}$ がただ一つ存在する。このベクトルを $\vec{a}$ の逆ベクトルといい，$-\vec{a}$ とかく。

(問 3)

V. 1 ～ V. 3 を用いて，次の等式の成り立つことを証明せよ。

① $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

② $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

③ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$

(問 4)

次の等式をみたす x, y の値を求めよ。

① $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

次に，ベクトルの実数倍を次のように定義する。

〔ベクトルの実数倍〕

$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, k を実数とすると，

$k\vec{a}=k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$ と書く。

たとえば　$2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ である。

(問 5)

次のベクトルをかんたんにせよ。

$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$6\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$3\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$　　$3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ベクトルの実数倍には次の性質がある。

V. 4　$k(l\vec{a})=kl\vec{a}$　　（結合法則）

V. 5　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　（分配法則）

V. 6　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　　（分配法則）

V. 7　$1\vec{a}=\vec{a}$

(問 6)

V. 4 ～ V. 6 の成り立つことを証明せよ。

(問 7)

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，次の等式が成り立つための k, l の値を求めよ。

① $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=k\vec{e_1}+l\vec{e_2}$

③ $ke_1+le_2=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

④ $k\vec{e_1}+l\vec{e_2}=\vec{0}$

(問 8)

次の $\boxed{}$ をうめよ。

① $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\boxed{}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\boxed{}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\boxed{}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\boxed{}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\boxed{}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\boxed{}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

⑤ $\boxed{}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\boxed{}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

⑥ $\boxed{}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\boxed{}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

(問 9)

任意のベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，与えられたベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とするとき，

$$\vec{x}=k\vec{a}+l\vec{b}$$

となる実数 k，l がただ一つ存在するための条件を a_1, a_2，b_1, b_2 を用いて表わせ。また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のかわりに，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いれば必ず，k，l はただ一通りにきまることを示せ。

§3. 平面上の点

1. ベクトルの演算の幾何的意味

直線上において，ベクトルとは点の移動を示すことであったが，平面上においても，ベクトルは点の移動の向きと大きさを示すものである。$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ とは，x 方向へ 1，y 方向へ 2 だけ移動することである。したがって，ベクトルの加法は，移動を続けて行うことを示している。たとえば，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を図示すると，下図のようになる。すなわち，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすれば，$\vec{a}+\vec{b}$ は

$\square$ OACB の頂点 C を示すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分は①で示すものと同じである。

右図より，

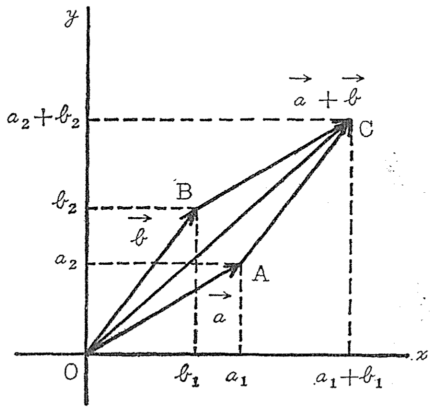
$\vec{a}+\vec{b}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

という等式が成り立つので，ベクトルの和は，点の移動を続けて行うことと同じ意味であることがわかる。



(問 1)

加法の交換法則，結合法則が成り立つことを図で示せ。

次に，逆ベクトルについて考えよう。V. 3 より，$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ となる $\vec{x}$ を $\vec{b}-\vec{a}$ と定義したが，これは図の上では下図のように，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる $\vec{x}$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を示すことがわかる。

$\vec{b}=\vec{0}$ ならば $\vec{a}+\vec{x}=\vec{0}$ となる。

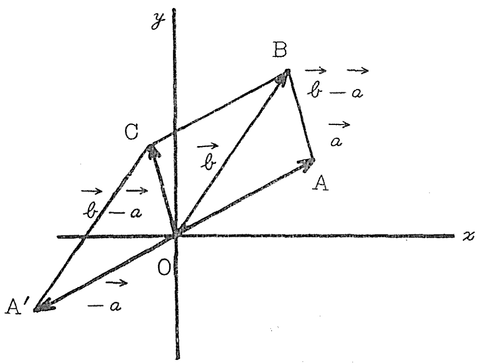
$\vec{x}=-\vec{a}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}$ となる。

このことを用いて，加法の定義より，

$\vec{b}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる。

右図より，四辺形 OA′CB は平行四辺形となり，したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ より，四辺形 OABC も平行四辺形となるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}-\vec{a}$



このことより，$\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{b}-\vec{a}$ の証明ができた。

(問 2)

作図により，次のベクトルを求めよ。

$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

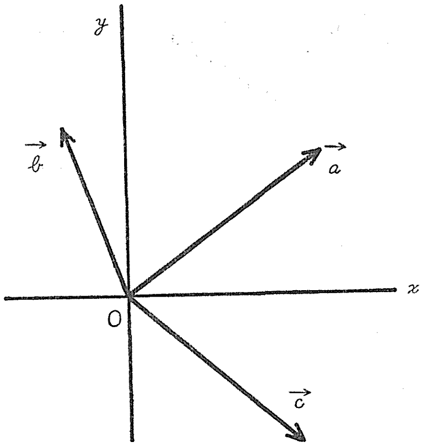
$-\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{c}$,

$\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{a}$,

$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$,

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}=\vec{0}$

となる $\vec{x}$,

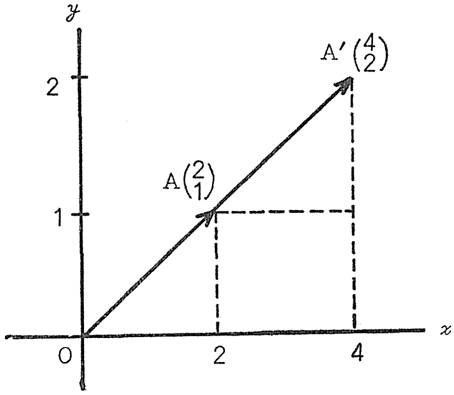


次に，ベクトルの実数倍を図示してみよう。例として，

$2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ を図示すると，

右図のように，

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を2倍に延長したベクトルを示している。

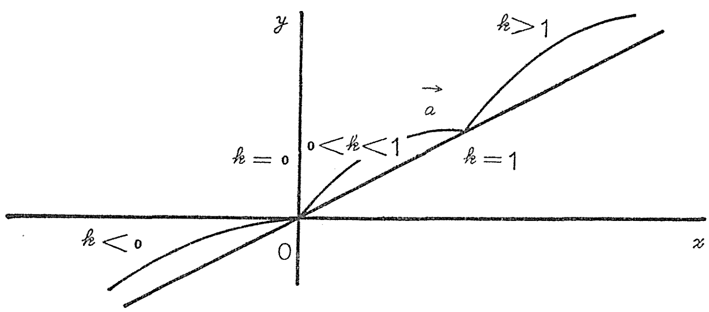


一般に，

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$k$ を実数とすると，$ka=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix}$

は，$\vec{a}$ を大きさは $|\vec{a}|$ の k 倍，向きは $k>0$ ならば $\vec{a}$ と同じ向き，$k<0$ ならば，$\vec{a}$ と逆の向きになるベクトルを示している。

〔$k\vec{a}$ の作図〕



（問 3）

次のベクトルを作図せよ。

$3\vec{a}$, $-2\vec{b}$

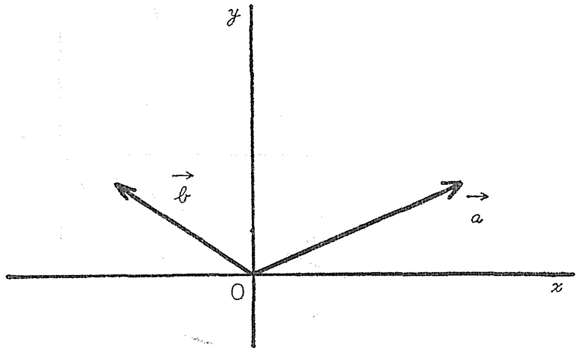
$\vec{a}+\vec{b}$

$2\vec{a}+\vec{b}$

$3\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{a}-2\vec{b}$

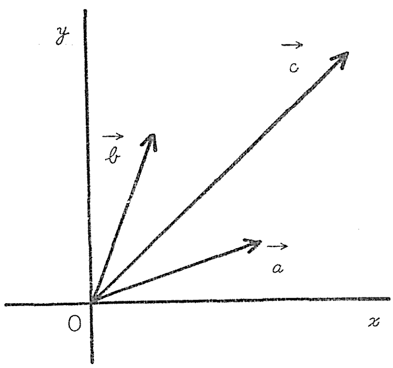


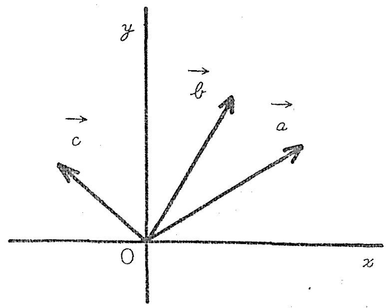
（問 4）

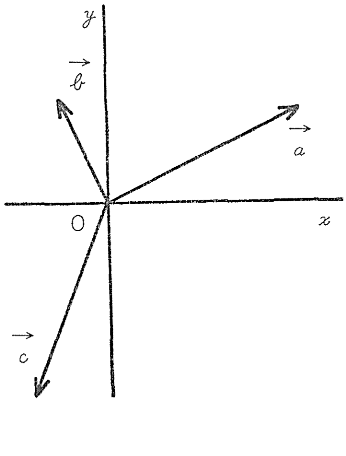
次の図を用いて，

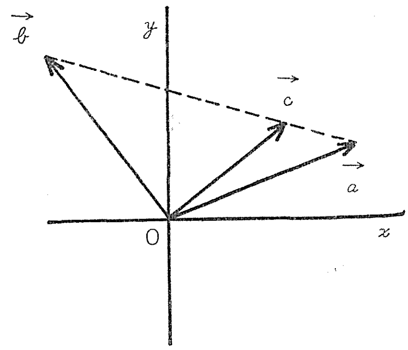
$\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$

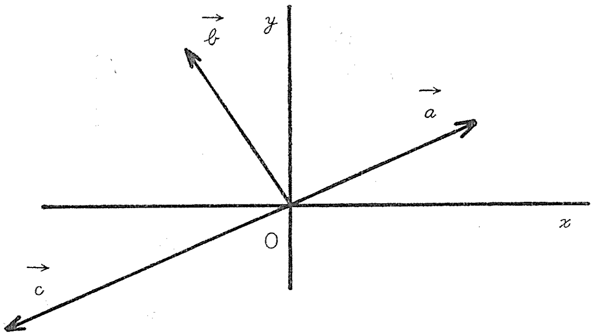
となる実数 k, l を求める作図の方法を示せ。

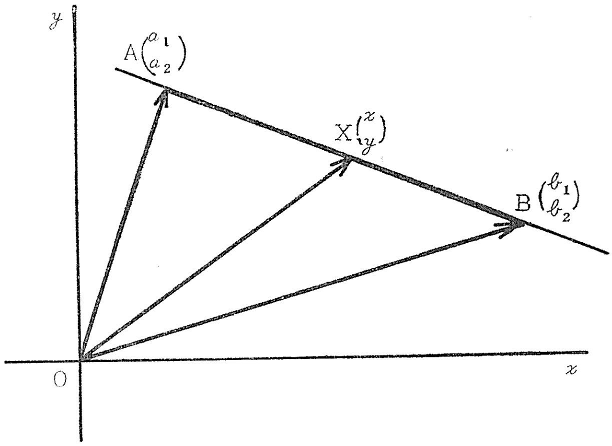












2° 分点の座標

直線 l 上に点 A, B, X をとる。A, B を定点とすれば,

$$\overrightarrow{AX}=t\,\overrightarrow{AB}$$

をみたす実数 t が X に対して，1 対 1 に対応することがわかる。

したがって，点 X の座標は次のようにして求められる。

$$\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

とすると,

$$\overrightarrow{AX}=t\,\overrightarrow{AB}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①より}$$

$$\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t\,(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}-t\,\overrightarrow{OA}$$

$$=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

よって $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-(1-t)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)a_1+tb_1\\(1-t)a_2+tb_2\end{pmatrix}$

となる。ベクトルの相等の定義により,

$$\begin{cases} x=(1-t)a_1+tb_1 \\ y=(1-t)a_2+tb_2 \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

②の等式を点 X の座標のパラメーター表示という。この表示で，パラメーター t と点 X の座標 x, y とが 1 対 1 対応であることも容易にわかるであろう。

②のパラメーター表示を次のように表わすことがある。

$1-t=k$, $t=l$ とおけば

$$\begin{cases} x=ka_1+lb_1 \\ y=ka_2+lb_2 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

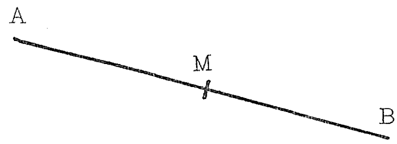
ただし，$k+l=1$ をみたす実数 k，l。

（問 1）

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とするとき，直線 AB 上に点 X が存在するための必要十分条件を③の等式から導け。

②の等式は，パラメーター t の方程式と考えられるから，t が特別な値をとると，点 X は線分 AB に対する特別な点となる。たとえば，

2 等分点（中点）M が線分 AB の中点であるとき，



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となるから，$t=\frac{1}{2}$ と考えればよい。

したがって，中点 M の座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，②の方程式より

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{a_1+b_1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{2}b_2=\dfrac{a_2+b_2}{2} \end{cases}$$

となる。

3 等分点

上図のように，線分 AB の 3 等分点 M，N とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となるから，M，N の座標は $t=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$ をそれぞれ②の方程式へ代入すればよい。

よって，点 M の座標は

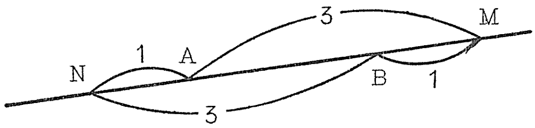
$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}a_1+\dfrac{1}{3}b_1=\dfrac{2a_1+b_1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}a_2+\dfrac{1}{3}b_2=\dfrac{2a_2+b_2}{3} \end{cases}$$

また，点 N の座標は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}a_1+\dfrac{2}{3}b_1=\dfrac{a_1+2a_1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{2}{3}b_2=\dfrac{a_2+2b_2}{3} \end{cases}$$

となる。

次に，点 X が線分 AB の外分点である場合を考えよう。



点 M は　$\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=3:(-1)$

点 N は　$\overrightarrow{AN}:\overrightarrow{NB}=(-1):3$

に外分されているとすると，

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB},\qquad \overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

となり，点 M, N の座標は，それぞれ，$t=\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ を②の方程式へ代入すればよい。

よって，点 M の座標は

$$\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}a_1+\dfrac{3}{2}b_1=\dfrac{-a_1+3\,b_1}{2} \\ y=\dfrac{-1}{2}a_2+\dfrac{3}{2}b_2=\dfrac{-a_2+3\,b_2}{2} \end{cases}$$

となり，点 N の座標は

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}a_1-\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{3\,a_1-b_1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}a_2-\dfrac{1}{2}b_2=\dfrac{3\,a_2+b_2}{2} \end{cases}$$

となる。

以上のことより，一般に線分 AB を $m:n$ に内分または外分する点 X の座標を求めるには，$\overrightarrow{AX}:\overrightarrow{XB}=m:n$ より

(ただし，m, n の符号は $\overrightarrow{AB}$ の向きを正として，$\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{XB}$ の符号をつける。)

$\overrightarrow{AX}:\overrightarrow{XB}=m:n$,　　$\overrightarrow{AX}:\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}=m:m+n$

となるから

$$\overrightarrow{AX}=\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{AB}$$

となり，$t=\frac{m}{m+n}$ を②の方程式へ代入すれば，点 X の座標は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{na_1}{m+n}+\dfrac{mb_1}{m+n}=\dfrac{na_1+mb_1}{m+n} \\ y=\dfrac{na_2}{m+n}+\dfrac{mb_1}{m+n}=\dfrac{na_2+mb_2}{m+n} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

すなわち，$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とすると

AB を $m:n$ に分ける点 X の座標は

$$X=\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$$

となる。ただし，$m+n \neq 0$ とする。

④の等式を線分 AB を $m:n$ に分ける点の座標を求める公式という。

(問 2)

線分 AB を $m:n$ に分ける点の座標を求める公式④において，A，B の位置関係には無関係に公式④が成り立つことをたしかめよ。

(問 3)

次の２点を結ぶ線分の中点，３等分点の座標を求めよ。

（1） $A=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$　　　$B=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

（2） $A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　　　$B=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

（3） $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　　$B=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(問 4)

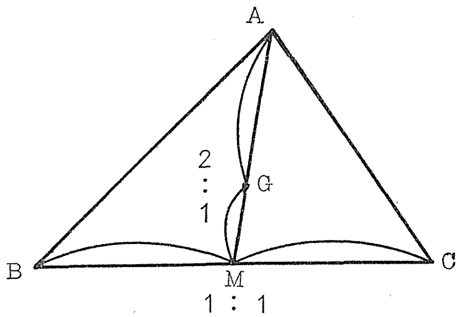
△ABC の重心 G の座標を次の順序で求めよ。

$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　　$C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

として，

（1） BC の中点 M の座標を求める。

（2） AM を 2:1 に内分する点 G の座標を求める。



(問 5)

(問４) の結果を用いて，次のことを証明せよ。

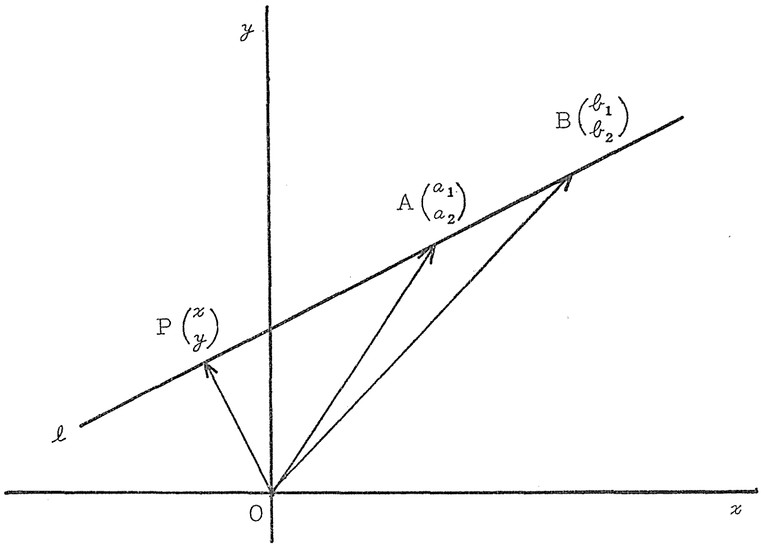
「△ABC の辺 AB，BC，CA を $m:n$ の比に内分する点を，それぞれ，D，E，F とするとき，△ABC と △DEF の重心は一致する」

§4.　直線の方程式

1°　２点を通る直線の方程式

空間における直線の決定条件は，

1°　２定点を通る。 2°，１定点と定方向をもつ場合に分けられる。



まず，1°の場合から考えよう。

上図のように，２定点を $A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とする。

直線 AB 上の任意の点を $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，§3 より $\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が点 P の位置と１対１に対応する。

したがって，直線 AB 上のすべての点は t の値によって，その位置がきまる。このことより，t を変数にとれば，

$$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

は，直線 AB のベクトル方程式といえる。

①の方程式を変形して，成分表示すれば，

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}-t\,\overrightarrow{OA}$$

$$=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (1-t)a_1+tb_1 \\ (1-t)a_2+tb_2 \end{pmatrix}$$

ベクトルの相等の定義により

$$\begin{cases} x=(1-t)a_1+tb_1 \\ y=(1-t)a_2+tb_2 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

この方程式を直線 AB の媒介変数（パラメーター）方程式という。（ただし，媒介変数は t）

②の方程式を用いると，パラメーター t によって，直線 AB 上のすべての点の位置がきまる。それは②の方程式を

$$\begin{cases} x=a_1+t\,(b_1-a_1) \\ y=a_2+t\,(b_2-a_2) \end{cases}$$

と変形すると明らかである。

この式から，パラメーター t を消去すると，

$$\begin{cases} x-a_1=t\,(b_1-a_1) \\ y-a_2=t\,(b_2-a_2) \end{cases}$$

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}\,(=\quad t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

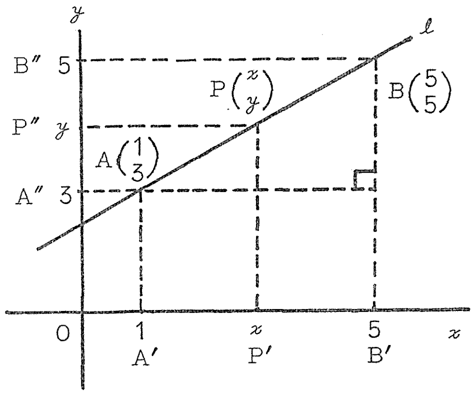
ただし，分母＝0 のときは，分子＝0 と定義する。

③の方程式を2定点 A，B を通る直線の方程式の陰形式表示という。具体的に示すと，

(例 1)

2点 A$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，B$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ を通る直線の方程式を求める。

(解)　右図のように A，B を通る直線 l 上の任意 P$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の点をとると，



$$\overrightarrow{AP}=t\,\overrightarrow{AB}$$

となるベクトル方程式をみたす。これを成分表示するために

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\,(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}-t\,\overrightarrow{OA}$$
$$=(1-t)\,\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$$

これを，成分表示すると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5-1\\5-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+4\,t\\3+2\,t\end{pmatrix}$$

よって，媒介変数方程式は

$$\begin{cases} x=1+4\,t \\ y=3+2\,t \end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}'$$

となる。この式より，t を消去すると，

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots③'$$

となる。これが直線 l の方程式の陰形式表示という。さらに，③を y についてとくと

$$y-3=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

となる。この方程式を直線 l の方程式の陽形式表示という。

ここで，②′，③′ の幾何的な意味を説明すると，②′ では

$x=1+4t$ は

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA'}+t\,\overrightarrow{A'B'}$ ということであり，

$y=3+2t$ とは，

$\overrightarrow{OP''}=\overrightarrow{OA''}+t\,\overrightarrow{A''B''}$ ということである。

また，③′ では

$$\frac{x-1}{4}=\frac{\overrightarrow{A'P'}}{\overrightarrow{A'B'}},\qquad \frac{y-3}{2}=\frac{\overrightarrow{A''P''}}{\overrightarrow{A''B''}}$$

という，ベクトルの比を示している。

（例１）の最後に示した直線の方程式の陽形式表示の一般の形は，③より

$$y=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}x+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-a_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

となる。

(問 1)

次の直線の方程式を求めよ。

（１） $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ を通る直線

（２） $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ を通る直線

（３） $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ を通る直線

（４） $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を通る直線

（５） $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ を通る直線

（６） $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ を通る直線

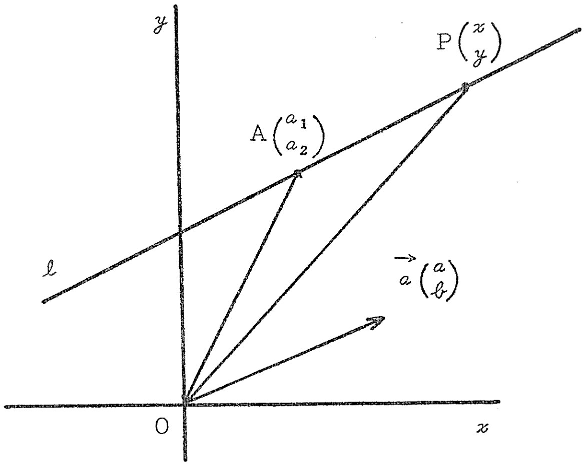
(問 2)

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ をみたす直線は x 切片 a, y 切片 b であることを証明せよ。

(問 3)

3点 $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}a\\4\end{pmatrix}$ が同一直線上にあるように，a の値を定めよ。

2° 一定点を通り定方向をもつ直線



図のように，定点 $A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ を通り，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に平行な直線 l の方程式を求めよう。

l 上の任意の点 $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ をとると，

$\overrightarrow{AP}=t\vec{a}$…………①

となる実数 t が点 P に対応してきまる。

①を直線 l のベクトル方程式という。この方程式を成分表示するために，

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{a}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{a}$

成分で表わすと

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

ベクトルの相等の定義より

$$\begin{cases}x=a_1+ta\\y=a_2+tb\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

この方程式を直線 l の媒介変数（パラメーター）方程式という。(ただし，媒介変数は t) この方程式は t と点 P の位置が1対1に対応していることを表わしている。

②の方程式より，パラメーター t を消去すると，

$$\frac{x-a_1}{a}=\frac{y-a_2}{b}\ (=t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(ただし，分母=0 のときは，分子=0 とする。)

③の方程式を直線 l の方程式の陰形式表示という。

前節の③の方程式と比較すると，分母の比

$a:b=b_1-a_1:b_2-a_2$ ……………………④

が成り立つ。

④の比例式の意味は，ベクトルの方向を示すものである。

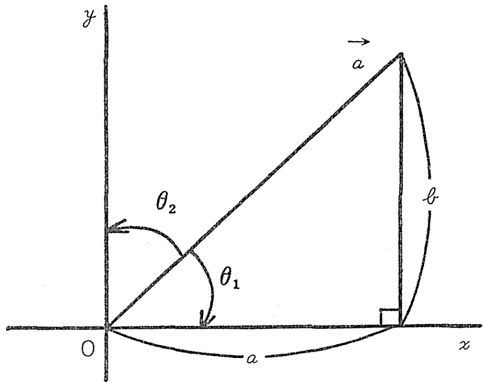
$\vec{a}$ の方向余弦は

$$\cos\theta_1=\frac{a}{|\vec{a}|},\qquad \cos\theta_2=\frac{b}{|\vec{a}|}$$

したがって，

$$\cos\theta_1 : \cos\theta_2 = a : b$$

となり，④の比例式は，直線の方向余弦の比となる。これを，直線 l の方向比という。



したがって，直線の方程式の陰形式表示では分母の比は，直線の方向を示す方向比となることがわかる。

（問 1）

前節問 1 で求めた直線の方向比はどうなるか。

（例 2）

点 $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ を通り，$\vec{a}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ に平行な直線の方程式を求める。

（解） 下図のように，直線 l 上の任意の点 $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ をとると，l のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{AP}=t\vec{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

となる実数 t が存在する。よって，

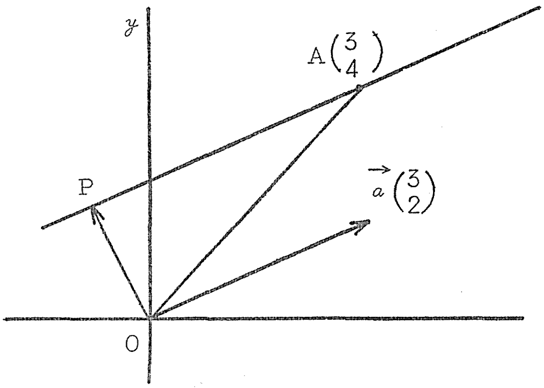
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\vec{a}$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{a}$$

成分表示すれば

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$



よって，媒介変数方程式は，

$$\begin{cases}x=3+3t\\ y=4+2t\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

パラメーター t を消去すると

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

となる。③の方程式を y についてとくと，

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{2}{3}(x-3)+4\\ y&=\frac{2}{3}x+2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

となって，陽形式表示ができる。

直線 l の方向比は③より $3:2$ である。これより，方向余弦を求めるには

$$\frac{\pm 3}{\sqrt{3^2+2^2}} : \frac{\pm 2}{\sqrt{3^2+2^2}} = 3:2$$

より，$\left(\dfrac{\pm 3}{\sqrt{13}},\ \dfrac{\pm 2}{\sqrt{13}}\right)$ が方向余弦となり，方向比から方向余弦は一意にきまらない。

(問 2)

次の直線の方程式を求めよ。

（1） 点$\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ を通り，$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ に平行な直線

（2） 点$\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ を通り，x 軸とのなす角が，45° の直線

（3） x 軸に平行で，点$\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ を通る直線

（4） y 軸に平行で，点$\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ を通る直線

(問 3)

2点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ を通る直線の方向余弦の比は $a_1-b_1 : a_2-b_2$ となることを示せ。

(問 4)

方向比が $3:-4$ のとき，方向余弦を求めよ。

同様にして，次の方向比から方向余弦を求めよ。

（1） $1:1$　　（2） $-2:2\sqrt{3}$　　（3） $\sqrt{3}:1$

(問 5)

点 $\mathrm{P}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ を通り，$\vec{a}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ に平行で，直線 $2x+4y-27=0$ と点Qで交わるとき，PQ の長さが $2\sqrt{3}-1$ であることを示せ。

§5. 内　　積

1° 2直線の位置関係

前節において，平面上の直線の方程式を求めた。すなわち，

2点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ を通る直線の方程式は $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}$ …………………①

また，点 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ を通り，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に平行な直線の方程式は

$$\frac{x-a_1}{a}=\frac{y-a_2}{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となることがわかった。このように，直線の方程式①，②をまとめて，x，y について，整理すれば，

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

の形に表わすことができる。ただし，A，B が同時に0になることはないものとする。

（問 1）

①，②を変形して，③の方程式を求めたとき，A，B，C はどんな形になるか。

すなわち，平面上の直線の方程式は③の形であらわされることがいえる。

逆に，③の形の方程式より，①，②の形の方程式は導かれるから，③の形の x，y の一次方程式が示す点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の集合は平面上で一つの直線になることがいえる。

（問 2）

③の方程式から，①，②の方程式を導け。

（ヒント）

$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ 上に点 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ があるとは，$\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}a_2+\mathrm{C}=0$ が成り立つことである。

以上のことより，平面上の直線の方程式は一般に，x，y の一次方程式

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$$

の形で表わされることが，わかったので，今後直線の一般的性質を考えるためにはこの方程式を用いる。この方程式を直線の方程式の一般形という。

2直線 l_1，l_2 が

l_1；$\mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\mathrm{C}_1=0$

l_2；$\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\mathrm{C}_2=0$

であるとき，2直線の方向比は

l_1 については，$\mathrm{A}_1x=-\mathrm{B}_1y-\mathrm{C}_1$

A_1，B_1 は同時に0ではない。ここでは，$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \fallingdotseq 0$ として，A_1，B_1 でわると

$$\frac{-x}{\mathrm{B}_1}=\frac{y+\dfrac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{B}_1}}{\mathrm{A}_1}$$

となり，l_1 の方向比は $-\mathrm{B}_1:\mathrm{A}_1$ となる。同様にして，l_2 の方向比は，$-\mathrm{B}_2:\mathrm{A}_2$ となる。したがって，直線 l_1，l_2 の平行条件は，方向比が等しければよいから

$$l_1 /\!/ l_2 \Longleftrightarrow -\mathrm{B}_1:\mathrm{A}_1=-\mathrm{B}_2:\mathrm{A}_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}=\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

となる。この場合の $l_1 /\!/ l_2$ というのは $l_1=l_2$（一致）の場合も含めている。

とくに，$l_1 \fallingdotseq l_2$ で $l_1 /\!/ l_2$（一致しない）のときには，$\dfrac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{B}_1} \fallingdotseq \dfrac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{B}_2}$ であればよいから

④の条件は

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$（一致しないで平行）となる。

（問 3）

平行条件において，$A_1=0$ または $B_1=0$ のとき，④の表わし方でよいか。

平行条件をあらわすのに，④を変形して，

$A_1B_2-B_1A_2=0$ かつ $C_1\neq C_2$……………………⑤

という表わし方もある。ただし，分母＝0 のときは，分子＝0 という条件を加えれば，④と⑤は同値となる。

次に，$l_1\perp l_2$ の条件を求めよう。

下図のように，l_1，l_2 に平行なベクトルを $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}-B_1\\A_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}-B_2\\A_2\end{pmatrix}$ とすると，$l_1\perp l_2$ だから，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ ゆえに，

$\angle POQ=\angle R$

となる。したがって，ピタゴラスの定理により，$PQ^2=OP^2+OQ^2$ を用いて，

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}B_1-B_2\\A_2-A_1\end{pmatrix}$ だから

$PQ^2=(B_1-B_2)^2+(A_2-A_1)^2$

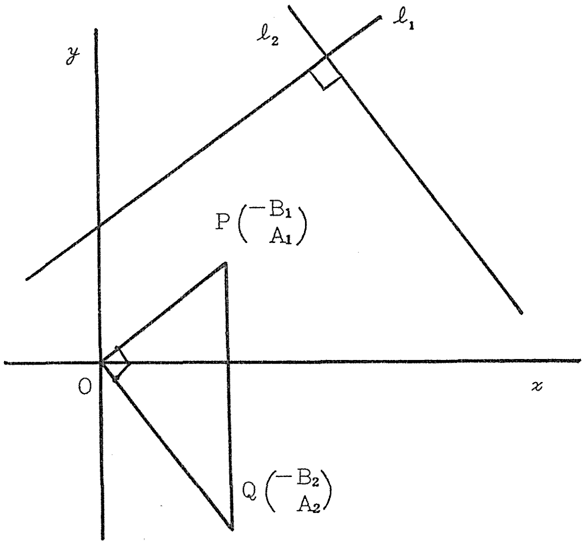
$=A_1{}^2+B_1{}^2+A_2{}^2+B_2{}^2=OP^2+OQ^2$

整理して

$A_1A_2+B_1B_2=0$……………⑥

となる。

これが $OP\perp OQ$ すなわち，$l_1\perp l_2$ となる条件である。



したがって，まとめてかけば，2直線 l_1，l_2 の平行条件，垂直条件は

平行条件（一致も含む）　$l_1 /\!/ l_2 \Longleftrightarrow A_1B_2-B_1A_2=0$

垂直条件　$l_1\perp l_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

である。

（問 4）

次の2直線の位置関係をしらべよ。

（平行，垂直の区別をせよ）

（1） $y=2x+3$，　$y=2x-4$

（2） $y=2x+4$，　$2y+x=5$

（3） $2x+3y-1=0$，　$6x+9y+2=0$

（4） $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{2}$，　$\dfrac{-x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}$

（問 5）

次の２組みの直線が平行または直交するように，$\boxed{}$ の中に数を入れよ。

（1）　$3x-y+1=0$,　　$\boxed{}\,x+y-1=0$

（2）　$\dfrac{x-1}{\boxed{}}=\dfrac{y+1}{2}$,　　$\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}$

（3）　$y=2x-3$,　　$3y=\boxed{}\,x+1$

（問 6）

点$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に，平行な直線は

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線は

$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ で表わされることを示せ。

（問 7）

２点 $A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ を結ぶ直線に平行で，点 $P\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ を通る直線，および，線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

（問 8）

次の２直線が交わるための条件を求めよ。

$ax+y=a^2$,　　$x+ay=1$

2°　ベクトルの内積

前節で $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ のとき，$A_1A_2+B_1B_2=0$ となった。すなわち，$A_1A_2+B_1B_2$ という数値は $\angle POQ$ と関係がありそうである。

したがって，２つのベクトルのなす角をベクトルの成分であらわしてみよう。

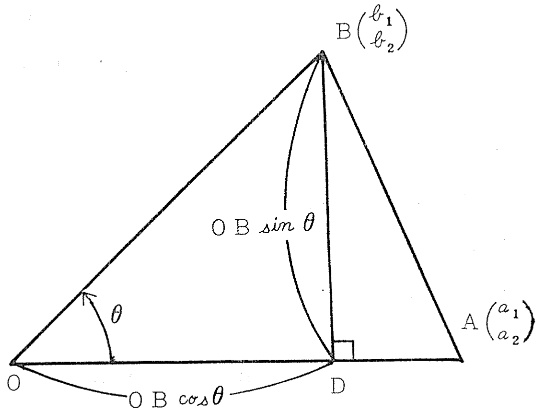
下図のように，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ をとり，なす角を θ とすれば

$\triangle AOB$ において，$BD\perp OA$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
AB^2&=BD^2+AD^2\\
&=(OB\sin\theta)^2+(OA-OB\cos\theta)^2\\
&=OB^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\
&\quad+OA^2-2\,OA\cdot OB\cos\theta\\
&=OB^2+OA^2-2\,OA\cdot OB\cos\theta
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$\cos\theta=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\,OA\cdot OB}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$



（問 1）

上図において，θ が鈍角の場合も $\cos\theta$ は①の形で表わされることをたしかめよ。

①の式を成分で表わすと

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$

だから

$$OA=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$OB=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

となり，

$$\cos\theta=\frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2}{2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}$$

したがって，

$$a_1a_2+b_1b_2=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

すなわち，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の x 成分，y 成分同志の積の和が②の式となる。

ここで，②の式をベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の内積とよび，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

または，成分で表わして

$$(a_1,\ a_2)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

と定義する。ここで，θ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角（始点を重ねたときに 2 つのベクトルのはさむ角）である。

④の式で，ベクトルの成分の並べ方を，横と縦にならべたが，並べ方によって，

$(a_1,\ a_2)$ ………………行ベクトル

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ………………列ベクトル

と呼び，ベクトルの表わし方のちがいだけである。内積のときは

行ベクトル×列ベクトル

というように，これから表わすように定義するが，

行ベクトル×行ベクトル

$(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

という表わし方もある。さらに，内積の記号にも $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB})$ と表わすこともあるが本書では③，④の表わし方を用いる。

内積を用いて，ベクトルの位置関係を表わしてみよう。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$

$\longrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= |\mathrm{OA}||\mathrm{OB}| \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\longrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ ……………⑤

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OB}}$（方向が等しい）

$\longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos 0$

（同じ向き）

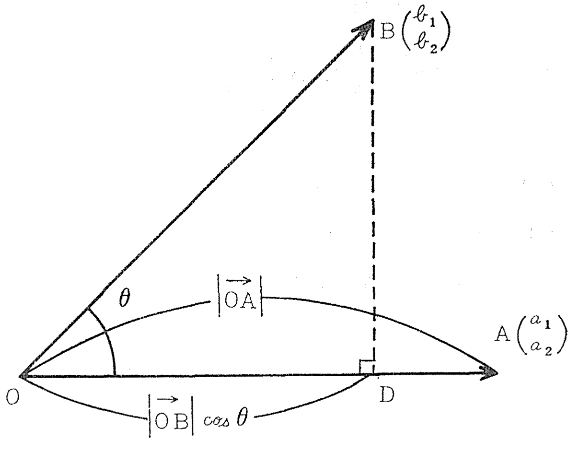
または $|\mathrm{OA}||\mathrm{OB}| \cos \pi$

（逆向き）

$= \pm |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$\longrightarrow \pm\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}$

$= a_1b_1 + a_2b_2$



平方して，整理すると

$\longrightarrow a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ …………………⑥

となる。

⑤，⑥の結果は前節で，２直線 l_1，l_2 の垂直条件，平行条件に対応することがわかる。

（問 2）

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ を証明せよ。

（問 3）

$\vec{a} \cdot \vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ を証明せよ。

（問 4）

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ならば，$\vec{a} \perp \vec{b}$ であるといってよいか。

（問 5）

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ が成り立つのは，２つのベクトルの向きがどんな関係にあるときか。

（問 6）

基本ベクトル $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次のベクトルの内積を求めよ。

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}$，　$\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}$，　$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}$，　$\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}$

（問 7）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ に垂直または，平行な単位ベクトルを求めよ。

（問 8）

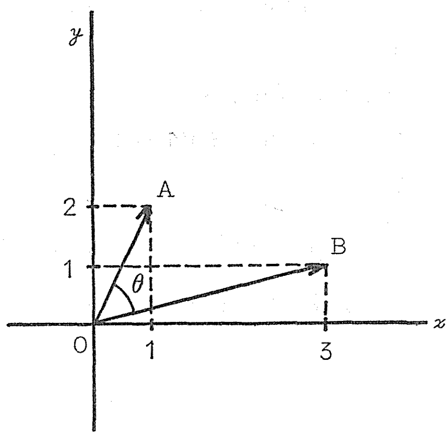
ベクトルの演算において，ベクトルの和，差，実数倍と内積との間に最も大きなちがいがあるのはどんなことか。

次に，ベクトルの内積の定義より，２つのベクトルのなす角を求めることができる。

（例）

２つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求める。

(解)　右図より



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ だから

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+2=5$

となり，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，図より $0\leqq\theta\leqq\pi$ だから $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

(問 9)

次の２つのベクトルのなす角を求めよ。

(1)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$　　(2)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

(3)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　　(4)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\\1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

3°　内積の演算法則

ベクトルの内積は英語で scaler product ともいう。すなわち，内積はベクトルではなくて，スカラー（実数）になるのである。

したがって，ベクトルの内積の演算法則は次のようなものが成り立つ。

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とするとき，

〔相等の定義〕

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}'\cdot\vec{b}'$ とは

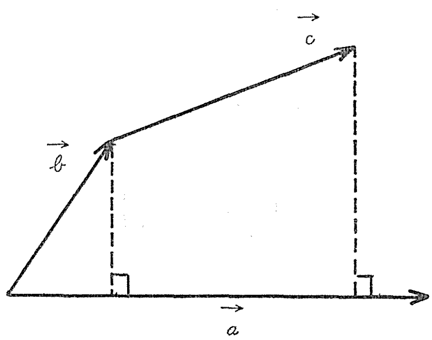
$a_1b_1+a_2b_2$ と $a_1'b_1'+a_2'b_2'$ の実数値が等しいときである。

〔演算法則〕

S.P 1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　（交換法則）

S.P 2　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　（分配法則）

S.P 3　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　（実数倍）



(問 1)

上の演算法則を成分表示を用いて，証明せよ。

(問 2)

S.P2 の分配法則を右の図を用いて，証明せよ。

(問 3)

ベクトルの内積では結合法則が成り立たない理由を述べよ。

(問 4)

$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

が成り立つ理由を S.P1～3 のどれかを用いて示せ。

(問 5)

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, 基本ベクトルを $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ とすると, $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ となることを証明せよ。

以上の演算法則を用いると, 次のような計算ができる。

(例 1)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ (分配法則)

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$ (分配法則)

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ (交換法則・定義)

(例 2)

$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ (定義)

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ (例1より)

$=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

(問 6)

次の等式・不等式を証明せよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)$

(問 7)

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を基本ベクトルとするとき,

$\vec{a}=a_1\cdot\vec{e_1}+a_2\cdot\vec{e_2}$

$\vec{b}=b_1\cdot\vec{e_1}+b_2\cdot\vec{e_2}$ と書けることを用いて, 内積の定義

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

を証明せよ。

ただし, $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする。

§6. 内 積 の 応 用

1° 2直線のなす角

0でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすれば，θ は

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

によって求められる。これを用いて，2直線 l_1, l_2 のなす角を求めよう。

l_1 ; $A_1x+B_1y+C_1=0$

l_2 ; $A_2x+B_2y+C_2=0$

とすれば，l_1, l_2 の方向比が，l_1 は $-B_1:A_1$, l_2 は $-B_2:A_2$ となる。

したがって，l_1 に平行なベクトル $\vec{a}$ は

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-B_1k\\A_1k\end{pmatrix}$, l_2 に平行なベクトル $\vec{b}$ は

$\vec{b}=\begin{pmatrix}-B_2k\\A_2k\end{pmatrix}$ と書ける。ただし，k は任意の定数。したがって，l_1, l_2 のなす角を $\widehat{l_1,l_2}=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

となる。このことより，直線の方程式が一般形で与えられているときでも，その他の場合でも方向比がわかっていれば，2直線のなす角は①の形で求められる。

(問 1)

次の2直線のなす角を求めよ。

(1) $x-\sqrt{3}y=1$, $\sqrt{3}x+3y-3=0$

(2) $\sqrt{3}x+y+1=0$, $-2\sqrt{3}x+2y=0$

(3) $\dfrac{x-1}{2}=y+1$, $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{-y+1}{6}$

(4) $-3x+1=0$, $-x+y-1=0$

(5) $x-1=y$, $\dfrac{x-1}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{y+2}{1+\sqrt{3}}$

(問 2)

ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ に対して，ベクトル $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$ が次の条件をみたすように，y の値を定めよ。 ① $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ② $\vec{a}\perp\vec{b}$

(問 3)

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，

$\vec{c}=|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ とするとき，$\vec{c}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ と等しい角をなすことを示せ。

(問 4)

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, $|\vec{a}|=|\vec{b}|\fallingdotseq 0$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}\,|\vec{a}|$ が成り立つとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

(問 5)

直線 $ax+by+c=0$ と, ベクトル $\vec{g}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が直交することを, 次の2通りの方法で証明せよ。

(1) 直線の方向比を求め, $\vec{g}$ の方向比を用いて, 直線と $\vec{g}$ のなす角を求める。

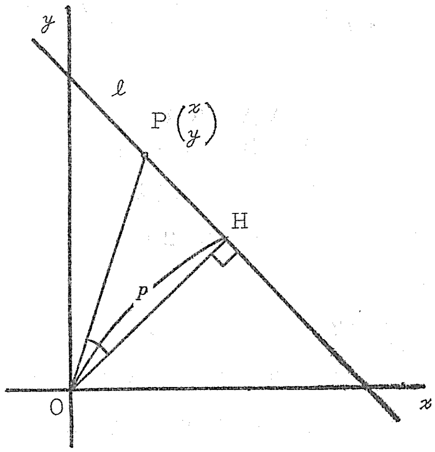
(2) 直線上の2点 P, Q をとり, $\overrightarrow{PQ}$ と $\vec{g}$ の内積を求めて, 直交することを証明する。

2° ヘッセの標準形

原点 O から直線 l へ下した垂線の長さを, ベクトルの内積を用いて表わそう。

$l\,;\,ax+by+c=0$

とし, 下図のように, O から下した垂線の足を H, l 上の任意の点を $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると,



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=|\overrightarrow{OH}|^2=p^2 \quad (p\geqq 0)$

ここで, $\overrightarrow{OH}\perp l$ だから $\overrightarrow{OH}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$

よって,

$|\overrightarrow{OH}|=p=|k|\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \quad |k|=\dfrac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}$

さらに

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=(x,\ y)\cdot\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}=k(ax+by)=-kc=p^2$ で

あるから, $|k|\,|c|=p^2$

$\therefore \quad \dfrac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}|c|=p^2$, $p\geqq 0$ だから ($p\fallingdotseq 0$のとき)

$$p=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

となる。すなわち, 原点 O から直線 $ax+by+c=0$ までの距離を p とすれば p は①の形で表わされる。

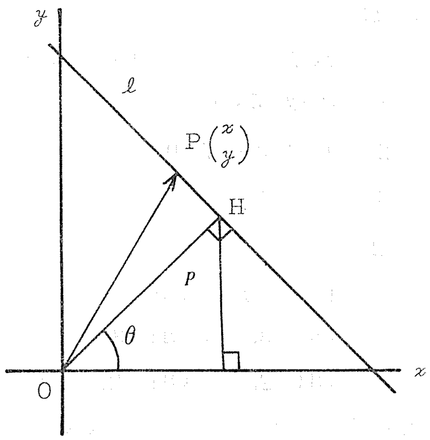
このことを用いて, 次の2つのことが求められる。

(1) ヘッセの標準形

下図のように, 原点 O から直線 l へ下した垂線の足を H とし, $OH=p$ (距離), $\angle x\,OH=\theta$ とすれば,

$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix} p\cos\theta \\ p\sin\theta \end{pmatrix}$ となる。

よって，直線 l の方程式は，l 上の任意の点を $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，



$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=p^2$$

成分で表わして

$$(x,\ y)\cdot\begin{pmatrix} p\cos\theta \\ p\sin\theta \end{pmatrix}=p^2$$

よって

$$xp\cos\theta+yp\sin\theta=p^2$$

$p>0$ でわって，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=p \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

この方程式をヘッセの標準形という。この方程式では，$\overrightarrow{OH}$ の方向比が（x の係数：y の係数）$=\cos\theta:\sin\theta$ という形で表わされ，右辺は原点からの距離を示している。

したがって，直線の一般形との関係をしらべると，

一般形　$ax+by+c=0$

ヘッセの標準形 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ であるから，係数を比べると，

$$a:b=\cos\theta:\sin\theta$$

となる。したがって，

$$a=k\cos\theta,\ b=k\sin\theta$$

よって，$a^2+b^2=k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=k^2$ となり，

$$\cos\theta=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\theta=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

として，a，b より，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を求めることができる。符号は，与えられた方程式より，$p>0$ となるように，決定すればよい。

（例）

直線 $\sqrt{3}x+y-4=0$ のヘッセの標準形を求める。

（解）定数項を移項して

$$\sqrt{3}x+y=4$$

両辺を $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ でわると

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=2$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ となる θ の値を求めて，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

求める標準形は

$$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}=2$$ となる。

〈問 1〉

次の直線のヘッセの標準形を求めよ。

（1） $x+y+5=0$

（2） $x-\sqrt{3}y+7=0$

（3） $-x+y-3=0$

〈問 2〉

次の直線の方程式を求めよ。

（1） $OH=3$, $\angle x\,OH=30°$ となる OH に直交し，H を通る直線

（2） $OH=2$, $\angle x\,OH=120°$ となる OH に直交し，H を通る直線

（2） 任意の点から直線までの距離

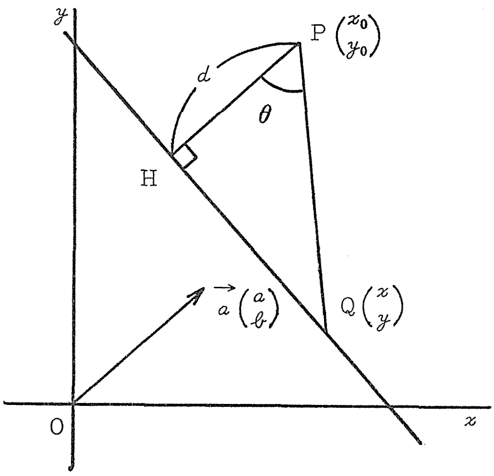
点 $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を直線 $l: ax+by+c=0$

外の点とし，P から l への垂線の足を H とするとき，$PH=d$ の値を求める。($d>0$)

直線 l に垂直なベクトルを $\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする

と，$\overrightarrow{PH}=k\vec{a}$ とかける。

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PH}||\overrightarrow{PQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{PH}|^2$



これを成分表示すると

$\overrightarrow{PH}=k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ より，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

ここで，k の値は $\overrightarrow{PH}=k\vec{a}$ より絶対値をとる

と，$|\overrightarrow{PH}|=|k||\vec{a}|$

$\therefore\ d=|k|\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\ |k|=\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$

よって，

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ}=(ka,\ kb)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$=k(ax-ax_0)+k(by-by_0)$

$=k(ax+by-ax_0-by_0)$

$=-k(ax_0+by_0+c)=|\overrightarrow{PH}|^2=d^2$

ここで，dは距離であるから，絶対値を考えると，

$$|k|\,|ax_0+by_0+c|=d^2$$

$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}|ax_0+by_0+c|=d^2$$

よって，d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ となる。

(問 3)

次の点から直線への距離を求めよ。

（1） 点$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，直線　$2x-y+1=0$

（2） 点$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，直線　$y=2x-3$

（3） 点$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，直線　$\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+5}{3}$

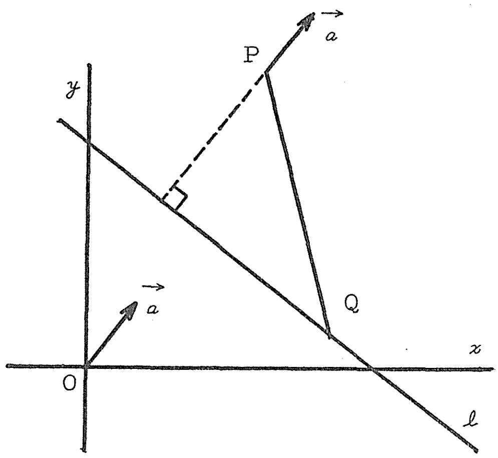
（4） 点$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，直線　$x=3$

(問 4)

距離 d を求める過程で，

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{PQ}$

の計算を用いて，d を求めよ。

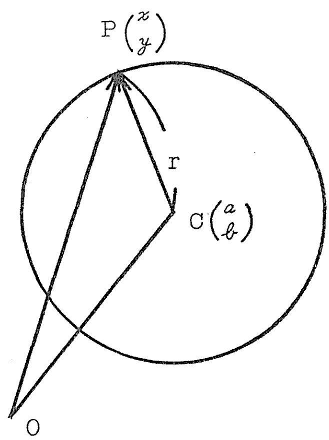


3° 円と接線の方程式

〔1〕 円の方程式

円の定義は定点よりの距離が一定な点の集合が円周であった。ここでは，円周（これを円と略称）の方程式を求めよう。

定点 C$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を中心，半径 r の円の方程式は，左図のように，円周上の任意の点を P$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると，円の定義より



$|\overrightarrow{CP}|=r$（一定）

平方して

$|\overrightarrow{CP}|^2=r^2$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}=r^2$

成分表示すると　$(x-a,\ y-b)\cdot\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}=r^2$　よって，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となる。

①の方程式は中心 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，半径 r の円の方程式の標準形という。① の方程式を展開すると一般に，

$$x^2+hx+y^2+ky+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

となる。この方程式を円の方程式の一般形という。一般形の特徴は，x^2 の係数$=y^2$ の係数ということである。

(問 1)

②の方程式の h，k，c を①の方程式の a，b，r を用いて表わせ。次に，②の方程式が円の方程式になるための十分条件を求めよ。

(問 2)

次の円の方程式を求めよ。

（1）　中心 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，半径 $\sqrt{3}$ の円

（2）　中心 $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$，半径 2 の円

（3）　点 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を通り，中心 $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ の円

(問 3)

次の円の方程式の中心と半径を求めよ。

（1）　$x^2-2x+y^2+4y-1=0$

（2）　$x^2+y^2-6x+8=0$

（3）　$x^2+2x+y^2-4y-4=0$

（4）　$x^2+2ax+y^2+2by+c=0$

次に直径の両端が与えられたときの円の方程式を考えよう。

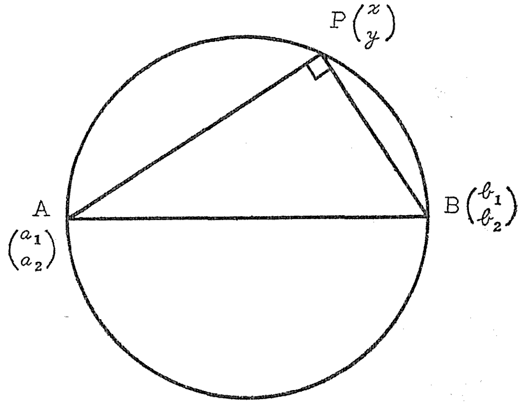
右図のように直径の両端を

$A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

とするとき，円周上の任意の点を $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると，円周角の性質より，

$\angle APB=\angle R$ となる。内積を用いると，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$



$$(x-a_1,\ y-a_2)\cdot\begin{pmatrix}x-b_1\\y-b_2\end{pmatrix}=0$$

よって，

$$(x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

となる。

③の方程式も展開すると一般形となることは明らかである。

（問 4）

次の円の方程式を求めよ。

（1） 直径の両端が $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ の円

（2） 直径の両端が $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ の円

（問 5）

一般形を用いて，次の円の方程式を求めよ。

（1） 3点 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ を通る円。

（2） 3点 $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ を通る円。

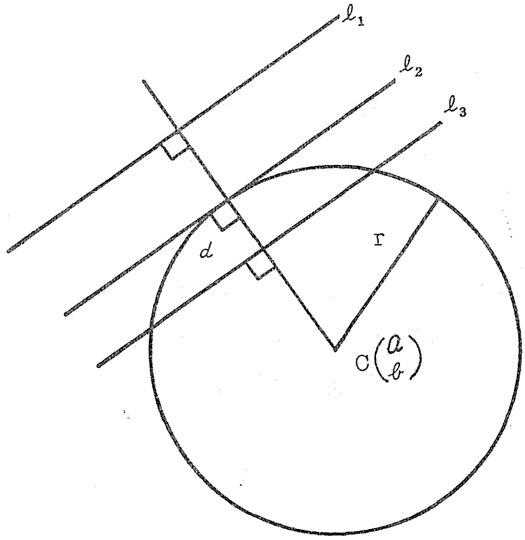
〔2〕 円の接線の方程式

（1） 円と直線の位置関係

円 C；$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

直線 l；$Ax+By+C=0$

の位置関係は，中心から直線までの距離 d と円の半径 r との大小関係によって，次のようにきまる。



$d>r$ 交わらない

（共有点0）

$d=r$

接する。（共有点1）

$0<d<r$

交わる。（共有点2）

これを式で表わすと，

$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ となり

交わらない場合は

$$\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}>r$$

接する場合は

$$\frac{|\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=r$$

交わる場合は

$$\frac{|\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}<r$$

のときである。

（例 1）

直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ との交点の個数を k の値によって，分類せよ。

円：$x^2+y^2=1$

直線：$2x-y+k=0$

だから，円の中心 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から，直線までの距離 d を求めると，

$d=\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$　半径 $r=1$

したがって

交わらない場合は

$1<\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$　$\therefore$　$k>\sqrt{5}$，$k<\sqrt{5}$ のとき共有点　なし

接する場合は

$1<\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$　$\therefore$　$k=\pm\sqrt{5}$ のとき共有点　1個

交わる場合は

$1>\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$　$\therefore$　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ のとき共有点　2個

（問 1）

直線 $y=mx-3$ が円 $x^2+y^2+2y=0$ と異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。また互に接するとき，m の値はいくらか。

（問 2）

次の円と直線の位置関係を調べ，共有点がある場合は，その点の座標を求めよ。

（1）　$x^2+y^2=4$,　　$x-2y=2$

（2）　$x^2+y^2-2x=0$,　　$x+\sqrt{3}y-3=0$

（3）　$x^2+y^2=9$,　　$4x+5y=20$

（2）　円の接線の方程式

円 C；$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の点 $\mathrm{T}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ において，円Cに接する接線の方程式を求める。

接線上の任意の点を $\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CT}}=r^2$

となる。

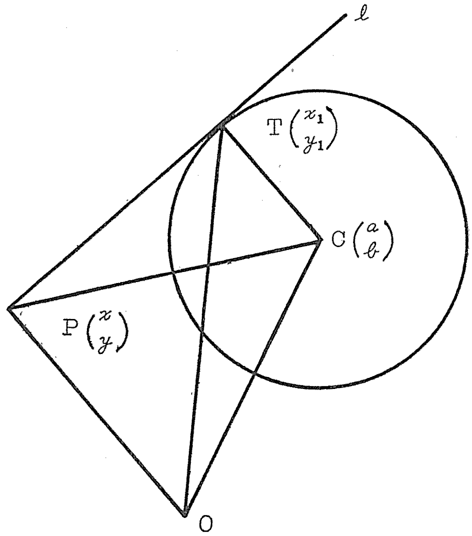
これを，求める接線のベクトル方程式という。

次に，これを成分表示すると，

$(x-a,\ y-b)\cdot\begin{pmatrix}x_1-a\\y_1-b\end{pmatrix}=r^2$

よって，

$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$ …………④



④の方程式を接点 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ における円Ｃの接線の方程式という。

とくに，中心が原点にある円

$x^2+y^2=r^2$

上の点 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ における接線の方程式は

$x_1x+y_1y=r^2$ ………………⑤

となる。

（問 1）

⑤の方程式を④より導け。

（問 2）

次の円の接線の方程式を求めよ。

（１） $x^2+y^2=2$ 接点 $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

（２） $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 接点 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

（３） $x^2-2x+y^2+3y-4=0$ 接点の x座標 0のとき，または，y座標 0のとき

（問 3）

円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の接線で，原点を通るものの方程式を求めよ。

（問 4）

点 P$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

（問 5）

中心が $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ で直線 $4x-3y+2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

（問 6）

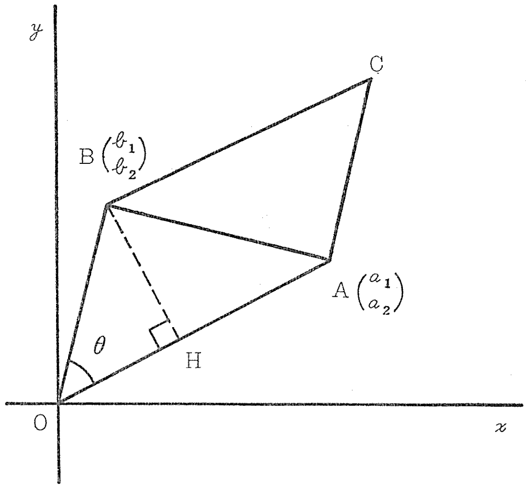
中心が直線 $y=x+1$ 上にあり，点 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ を通り，かつ，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

§7. 平行四辺形の面積

1° 平行四辺形の面積

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ の和 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

は下図のように，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が作る平行四辺形 OACB の対角線である $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる。



このように，ベクトルの和を考えると，平行四辺形が一般に作られる。

したがって，ベクトルの幾何的量を考えるとき，長さ，向きにつづいて，平面上では，平行四辺形の面積は大切な量である。

この章では，平行四辺形の面積の表わし方とその意味を考えるのである。

上図の平行四辺形の面積Sは，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると

$$S=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta$$
$$=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}\sin\theta\cdots\cdots\cdots①$$

となり，$\sin\theta$ の値が求められればよい。$\sin\theta$ の値は，ベクトルの内積を用いれば，次のようにして，求められる。ただし，θ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ としてよい。

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\qquad \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

より，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\ (0\leqq\theta\leqq\pi)=\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}{(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)^2}}$$

成分表示すると，

$$=\frac{\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}}{\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}}=\frac{\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2-2a_1a_2b_1b_2}}{\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}}$$

$$=\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}}$$

となり，これを①へ代入すると，

$$S=\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}\cdot\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}}=|a_1b_2-a_2b_1|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

このようにして，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の成分で表わすことができる。

②の絶対値記号の中の部分を次のような記号を用いて表わす。

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

この記号を２次の行列式といい，展開のし方は

$$\begin{array}{ccccl} a_1 & & b_1 & \longrightarrow & -a_2b_1 \\ & \times & & & \\ a_2 & & b_2 & \longrightarrow & +a_1b_2 \quad (+ \\ \hline & & & & a_1b_2-a_2b_1 \end{array}$$

となる。

例えば

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times 4-3\times 2=4-6=-2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times(-1)=-4+3=-1$$

というように展開すればよい。

行列式という名前は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{において} \quad \begin{array}{ccl} a_1 & b_1 & \longrightarrow \text{第一行} \\ a_2 & b_2 & \longrightarrow \text{第二行} \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{第一列} & \text{第二列} & \end{array}$$

すなわち，横に並んだ数を行，縦に並んだ数を列と呼ぶので，行列式と呼ぶのである。

２次の行列式というのは，行が２個，列が２個あるので２次というのである。

(問 1)

次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式を用いれば，②の式は

$$\mathrm{S}=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\|$$ となる。これは，さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ であることを考えあわせて

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$

と略記することもある。

(問 2)

次の２つのベクトルによって，作られる平行四辺形の面積を求めよ。

（1） $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$　　（2） $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

（3） $\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{g}=\begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix}$

（問 3）

次の2つのベクトルが作る平行四辺形の面積が2となるように，x, y の値を求めよ。

（1） $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$　　（2） $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

（3） $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\y\end{pmatrix}$　　（4） $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\-2\end{pmatrix}$

（問 4）

次の4点が作る平行四辺形の面積を求め，そのときの，x, y の値を求めよ。

（1） A $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　B $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$　C $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　D $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

（2） E $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$　F $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$　G $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　H $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

（3） I $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$　J $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　K $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$　L $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

（問 5）

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積を $|\vec{a}, \vec{b}|$ とかくことにすれば，次の等式の成り立つことをたしかめよ。

（1） $|k\vec{a}, \vec{b}|=k|\vec{a}, \vec{b}|$

（2） $|(\vec{a}+\vec{b}), \vec{c}|=|\vec{a}, \vec{c}|+|\vec{b}, \vec{c}|$

2° 2次の行列式

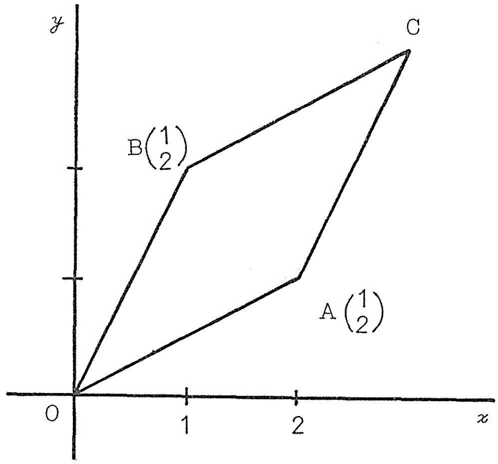
前節で $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ を2次の行列式とよび，平行四辺形の面積を求めるのに，便利な記号であることがわかった。この節では，2次の行列式のもっている性質を考えよう。

（1） 行列式の符号

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-4=-3$$

となって，その結果



$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

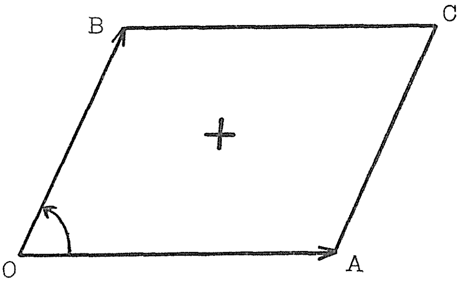
となる。ベクトルで書くと

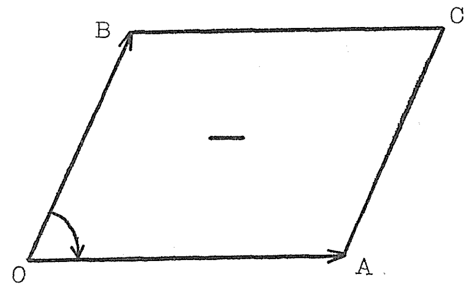
$|\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}| > 0$

$|\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA}| < 0$

となる。

このことから，四辺形の面積に符号をつけて考えることにすれば





矢印の方向は行列式で先きに並べたベクトルから後に並べたベクトルの方向へ矢印をつけると，左巻きが+，右巻きが − となる。このように考えると符号のついた面積が考えられる。一般に，行列式で，行あるいは列をいれかえると，符号が逆になる。

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$ 列の入れかえ

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}$$ 行の入れかえ

(問 1)

上の結果をたしかめよ。

(問 2)

行列式で対角線方向にある成分を入れかえたら符号はどうなるかたしかめよ。

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix}$$

(問２) の結果より，行列式では，行と列を入れかえても，値は変らないといえる。

(問 3)

上の結果を $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ について，平行四辺形の面積を用いて，説明せよ。

(２) 行列式の k 倍

$$\begin{vmatrix} ka_1, & b_1 \\ ka_2, & b_1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka_1, & kb_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行列式の１つの行または，列をk倍すれば行列式の値もk倍になる。

たとえば，２列目を２倍すると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3\times2 \\ 2 & 4\times2 \end{vmatrix} = 8-6\times2=-4=4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

となる，

（問 4）

２行，２列目をk倍したときも成り立つか，たしかめよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2, & kb_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix}$$

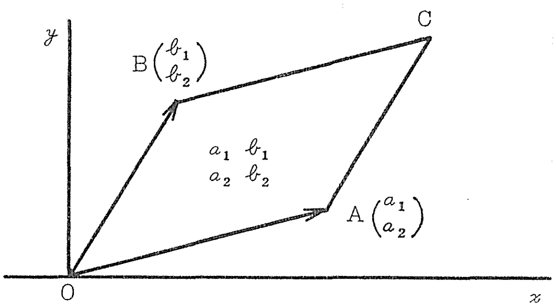
（問 5）

次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$$

（問 6）

平行四辺形の面積を用いて，この性質を説明せよ。$\begin{vmatrix} ka_1, & b_1 \\ ka_2, & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ka_1, & kb_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$ で考えよ。



（3） 行列式＝0

行列式の１つの行（または列）が，，他の行（または列行のちょうどk倍になっていたら，その行列式は０である。

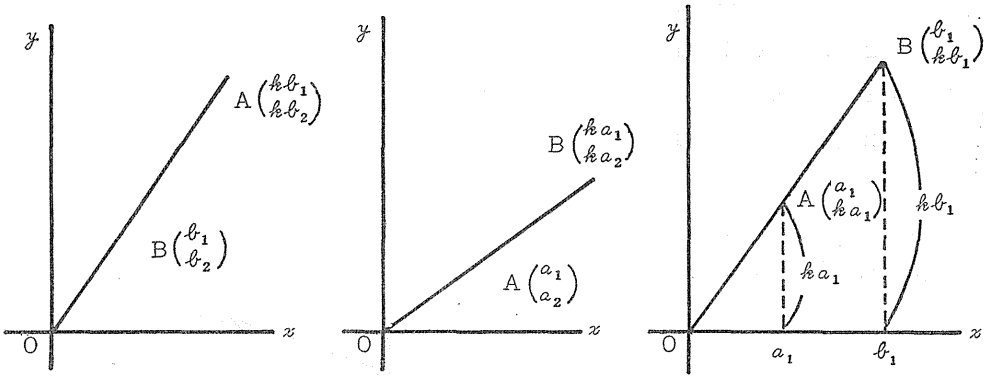
たとえば，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-2)=0$$

となる。一般に表わすと，

$$\begin{vmatrix} kb_1 & b_1 \\ kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ ka_1, & kb_1 \end{vmatrix} = 0$$

上の結果を図示すると，



上図のように，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が同一直線上にあって，平行四辺形が作られないので，面積は 0，すなわち，行列式$=0$ となる。

(問 7)

次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(問 8)

次の行列式が 0 になるように，x の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

（4） 行列式の成分の演算

行列式の１つの行（または列）を k 倍して，他の行（または列）に加えて作った行列式の値はもとの行列式の値に等しい。

すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1+b_1 \\ a_2 & ka_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ ka_1+a_2, & kb_1+b_2 \end{vmatrix}$$

等が成立する。たとえば

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[+\text{第２列}]{\text{第１列}\times(-3)} \begin{vmatrix} 1 & 3-3 \\ 2 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-2)-0\times 2=-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-2\times 3=-2$$

となり，上の等式は成立する。

(問 9)

次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

（1） 第１行×(−２)＋第２行

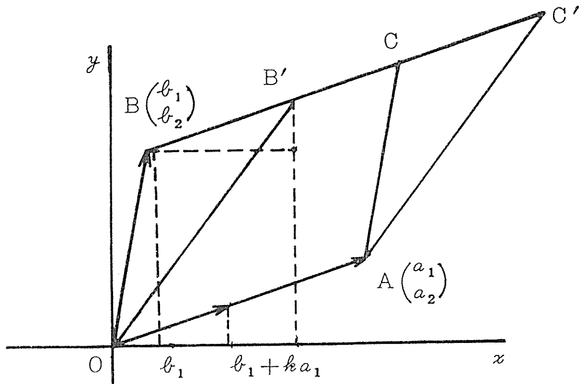
（2） 第２行×(−１)＋第１行

（3） 第１列×１＋第２列

（4） 第２列×(−２)＋第１列

この性質を平行四辺形の面積を用いて，説明しよう。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1+b_1 \\ a_2 & ka_2+b_2 \end{vmatrix}$$



$\begin{pmatrix} ka_1+b_1 \\ ka_2+b_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} ka_1+b_1 \\ ka_2+b_2 \end{pmatrix}$ は，B′ が $\overrightarrow{BC}$ 上にあることがわかる。したがって，

$$▱OACB = ▱OAC'B'$$

となり，与式は成立する。

(問 10)

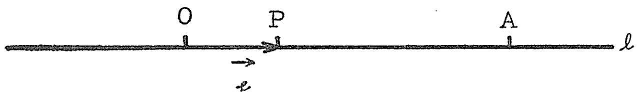
平行四辺形の面積を用いて，次の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1+a_2, & kb_1+b_2 \end{vmatrix}$$

2° ２次元のベクトル

直線上のベクトルは，原点 O と任意の点 P をきめると，すべての直線上の点 A は



$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{OP}$$

が成り立つ，実数 x が点 A の位置に対して，１対１に対応して，存在した。よって，$\overrightarrow{OP}$ を直

線 l 上の基本ベクトルとよび，$\vec{e}$ で表わし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{e}$ に対応して，点 A の座標を (x) ときめることができた。

平面上においても，同じ考え方で

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，　$\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ をとると，すべての平面上の点 A について

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$$

となる実数の組 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が，点 A に対して 1 対 1 に対応して存在する。このような表わし方を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の一次結合で表わせたという。

このことより，直線上のベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{e}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

平面上のベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

と表わせる。この $\vec{e}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を直線，平面上のベクトルの基本ベクトルとよぶ。

基本ベクトルが 1 個で表わされるベクトルを（①）1 次元のベクトル，2 個で表わされるものを（②）2 次元のベクトルという。

ここでは，基本ベクトルの性質について，しらべよう。

2 つのベクトル $\vec{X_1}$，$\vec{X_2}$ において

$$a_1\vec{X_1}+a_2\vec{X_2}=\vec{0}$$

となるのは $a_1=a_2=0$ のときにかぎる場合，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ は 1 次独立であるといい，そうでないときは，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ は 1 次従属であるという。1 次従属のときは，a_1，a_2 のどちらかは 0 でないものがあるから $a_1 \neq 0$ とすると

$$a_1\vec{X_1}=-a_2\vec{X_2}$$

よって，$\vec{X_1}=-\dfrac{a_2}{a_1}\vec{X_2}$ となり，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ が同一直線上にあることがわかる。

このことより，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ が 1 次従属であるときは，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ の作る平行四辺形の面積が 0，すなわち，

$$|\vec{X_1},\ \vec{X_2}|=0$$

となる。

このことより，$\vec{X_1}$ と $\vec{X_2}$ が 1 次独立であるためには，

$$|\vec{X_1},\ \vec{X_2}|\neq 0$$

であればよいことがわかる。

このことをたしかめてみよう。

（例 1）

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$ は1次独立か。

(解)

$$|a,\ b|=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

である。したがって，1次独立である。さらに，

1次独立の定義を用いると

$$a_1\vec{a}+a_2\vec{b}=\vec{0}$$

となる，a_1，a_2 は $a_1=a_2=0$ だけにかぎることを示そう。

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\2a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3a_2\\4a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1+3a_2\\2a_1+4a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，ベクトルの相等の定義より

$$\begin{cases}a_1+3a_2=0\\2a_1+4a_2=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

となる，a_1，a_2 に関する連立方程式をとくと

$$a_1=a_2=0$$

となる。

(例 2)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$ は1次独立か。

(解)

$$|\vec{a},\ \vec{b}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$$

となって，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次従属である。

1次従属の定義によって，たしかめると，

$$a_1\vec{a}+a_2\vec{b}=\vec{0}$$

となる a_1，a_2 を求めると，

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\2a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a_2\\4a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1+2a_2\\2a_1+4a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1+2a_2=0 \\ 2a_1+4a_2=0 \end{cases}$$

となる，a_1，a_2 に関する連立方程式をとくと，

$0a_1=0$,　　$0a_2=0$

となり，a_1，a_2 は不定となる。

したがって，$a_1=a_2=0$ 以外の a_1，a_2 の実数値が存在する。

したがって，ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ は１次従属である。

（問 1）

次のベクトルは１次独立か，１次従属かしらべよ。

（1） $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　　（2） $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$　　（4） $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

（5） $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$　　（6） $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

（問 2）

上の１次独立なベクトルについて，$\vec{p}$ を２つのベクトルの１次結合で表わせ。
（$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ となる。x，y を求めよ）

（1） $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　　（2） $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

（3） $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　　（4） $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

（問 3）

１次元のベクトルの１次独立，１次従属の定義は２次元の場合と同様に考えてよいか。

3° 連立一次方程式の解

２つのベクトルの１次結合を作るには連立方程式をとかなければならなかった。

たとえば

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,　$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=x\vec{a}+y\vec{b}$

となる，実数 x，y をきめるには，

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y\\4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

を x, y についてとくと，

ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の１次結合で，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

と表わされる。

すなわち，①の連立方程式の解が存在すれば，１次結合で表わされる。

このことを用いて，

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② $$

という，連立方程式の解の存在条件と解の求め方を考えよう。

前節を用いれば，ベクトルの一次結合より

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

となる，実数 x, y が存在すればよいから解の存在条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots③ $$

であることが必要かつ十分な条件である。

（定理）　連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

の解が只一つ存在するための必要，十分条件は，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ である。

（問 1）

次の方程式には解が一通りに存在するかどうか，たしかめよ。

（１） $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$　　（２） $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$

（３） $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$　　（４） $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

次に連立方程式の根を求めてみよう。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

y を消去して

$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad (a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$$

同様にして，y を求めると

$$y=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ (a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$$

となる。この解を行列式を用いて表わすと，

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$ となる。

定理の条件より分母$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ だから，解は只一通りにきまる。

上の解の係数の行列式は

x の係数，y の係数，定数項

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{array}$$

$$x=\frac{|\vec{c},\ \vec{b}|}{|\vec{a},\ \vec{b}|} \qquad y=\frac{|\vec{a},\ \vec{c}|}{|\vec{a},\ \vec{b}|}$$

すなわち，

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \text{定数項} & y\text{の係数} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x\text{の係数} & y\text{の係数} \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} x\text{の係数} & \text{定数項} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x\text{の係数} & y\text{の係数} \end{vmatrix}}$$ となっている。

(問 2)

次の連立方程式をとけ。

（1）$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$　（3）$\begin{cases} x-3y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$

(問 3)

次の３つの直線が１点で交わるように，定数 a の値を求めよ。

また，このとき，３点 $(1,\ -1)$，$(2,\ -3)$，$(2a,\ -7)$ は同じ直線上にあることを証明せよ。

$x-y=3-a,\quad 2x-3y=5-2a,\quad 2ax-7y=1$

(問 4)

２直線　$x+ay+1=1,\quad ax+(a+2)y+2=0$

が次の条件をみたすように，a の直を定めよ。

（1）平行　（2）一致する　（3）垂直　（4）交わる

（問 5）

次の2直線の交点を求めよ。

$ax+y=a^2$,　$x+ay=1$　（ただし，aは定数）

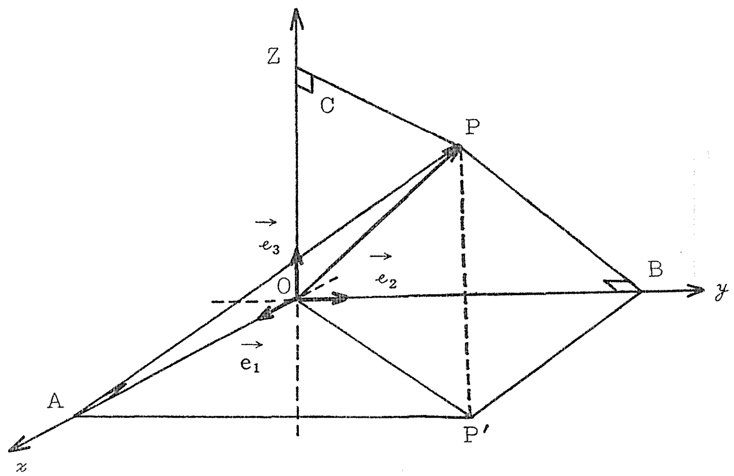
（問 6）

二元一次連立方程式の解の求め方を平行四辺形の面積を用いて説明せよ。

§8. 空間のベクトル

1° 成分表示

空間のベクトルの成分表示を次のようにして考える。直交する三直線の交点をOとし，一直線をOxとし，正の方向と定め，直交する他の一直線をOyとし，正の方向を定め，それぞれx軸，y軸の正の方向とよぶ，x軸とy軸とで決定された平面をx—y平面という。x軸の正の方向よりy軸の正の方向へOxをOyへ重ねるように右ねじを回転したとき，右ねじの進む方向をz軸の正の方向と定める。Z軸をOzとかく，OZはx—y平面に直交する直線である。



このように定めた1組の数直線 Ox, Oy, Oz を，右手系の直角座標軸という。（または座標軸）Oを原点，Ox, Oy, Ozをそれぞれ，x軸，y軸，z軸とよぶ。

空間内の点Pをとって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の成分表示を考える。

x, y, z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$とし，これをx, y, z軸の基本ベクトルという。

Pのx—y平面への正射影をP′とすると，PとP′は1対1に対応する。

P′はx—y平面上の点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$$

と表わすことができる点Aが一つ存在する。ここで，P′A⊥Oxとなる。

つぎに，$\overrightarrow{\mathrm{P'P}}$ // Ozであるから，$\overrightarrow{\mathrm{P'P}}=z\vec{e_3}$とかける実数$z$が只一つ存在する。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP'}}+\overrightarrow{\mathrm{P'P}}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$ となる実数 x，y，z が只一組み存在することがいえる。

このことより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に対して，3実数 x，y，z の組を対応させて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表わし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示という。また，点Pの座標は $(x,\ y,\ z)$ であるという。

（問 1）

点Pより x，y，z 軸へ下ろした垂線の足をそれぞれ，A，B，Cとするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{e_1},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{e_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=z\vec{e_3}$$

となる x，y，z が只一組存在することを証明せよ。

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\vec{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\vec{e_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書けることもわかる。

（問 2）

$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を x，y，z 軸の基本ベクトルとするとき，

$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}=\vec{0}$　（$\vec{0}$ は定義を見よ）

となる，$(x,\ y,\ z)$ の組は $(0,\ 0,\ 0)$ 以外にはないことを示せ。

ベクトルの大きさと方向を成分表示を用いて表わそう。

図1において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OP'}}^2+\overrightarrow{\mathrm{PP'}}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向を次のように定義する。

$\angle\mathrm{POA}=\alpha$，$\angle\mathrm{POB}=\beta$，$\angle\mathrm{POC}=\gamma$ とすると，

$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ただし，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$ とする。

このようにして求めた，三つの実数の組 $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の方向余弦という。

零ベクトル $\vec{0}$ の大きさは $|\vec{0}|=0$，方向余弦は定義できない，すなわち，方向は考えない。

（問 3）

次のベクトルの大きさと方向余弦を求めよ。

$\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\vec{c}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$　$\vec{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\vec{e}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$　$\vec{f}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（問 4）

点Pが x—y 平面，y—z 平面，z—x 平面，x 軸，y 軸，z 軸にあるとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分はどのような形であらわされるか，また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ ならばどうか。

（問 5）

次のような方程式をみたす点はどんな図形になるか。

① $x=1$,　② $y=2$,　③ $z=0$

（問 6）

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ を証明せよ。

2° ベクトルの演算

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$,　$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ とするとき，基本ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ を用いて表わせば，

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$,　$\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3}$ となるから，

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}+(a_3+b_3)\vec{e_3}$$

とベクトルの和が計算される。これをベクトルの成分表示すれば，

和　$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$ となる。

実数倍　$k\vec{a}=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{pmatrix}$

内　積　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

ベクトルの表わし方は上のように2通りの表わし方がある。横に成分を並べるベクトルを行ベクトルとよび $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ と書く

縦に成分を並べるベクトルを列ベクトルとよび $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ と書く。

ベクトルの内積では，行ベクトル×列ベクトルという書き方をする。これは一つの習慣である。今後，ベクトルの内積の成分表示では上のように書く。一般には，ベクトルの成分表示は列ベクトルで表わすことにするが，行ベクトルでも表わすことができるように，練習しておくことが必要である。

（定義）ベクトルの相等

$$\vec{a}=\vec{b},\quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

零ベクトル　$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

演算法則

(加法)

1° 交換法則

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2° 結合法則

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3° 逆　　算

任意の $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ をみたす $\vec{x}$ がただ一つ存在する。

このような $\vec{x}$ を $\vec{b}-\vec{a}$ と書く。

(実数倍)

4° 分配法則 (1)

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

5° 分配法則 (2)

$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

6° 結合法則

$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})=l(k\vec{a})$

7° 単位ベクトル

$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(内積)

8° 交換法則

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

9° 結合法則

$(k\vec{a}\cdot\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot k\vec{b})$

10° 分配法則

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

1°～7° の演算法則のなりたつ集合を線型空間という。

(問 1)

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$　$\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$　として，成分表示を用いて，1°～10° の法則の成り立つことをたしかめよ。

(問 2)

次のことを 3° を用いて証明せよ。

ただし，$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$,　$\vec{0}-\vec{a}=-\vec{a}$ とあらわす。

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$　　(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$　　(3) $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$

(問 3)

実数倍の性質より，次のことを証明せよ。

（1） $k(\vec{b}-\vec{a})=k\vec{b}-k\vec{a}$　　（2） $k\vec{a}=\vec{0}$ なら $k=0$ か $\vec{a}=\vec{0}$ である。

(問 4)

次の等式を導け。

（1） $-(-\vec{a})=\vec{a}$　　（2） $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$　　（3） $\vec{a}-\vec{0}=\vec{a}$

（4） $(\lambda-\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}-\mu\vec{a}$　　（5） $k\vec{0}=\vec{0}$　　（6） $0\vec{a}=\vec{0}$

（7） $k(-\vec{a})=-k\vec{a}$　　（8） $(-k)\vec{a}=-k\vec{a}$　　（9） $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

(問 5)

$\vec{a}=(3,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ 0)$ のとき，次の方程式をとけ。

（1） $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$　　（2） $3\vec{x}-2\vec{a}=4\vec{b}$

（3） $3(\vec{x}-\vec{a})=2(\vec{b}-\vec{x})$　　（4） $\dfrac{2\vec{x}-\vec{a}}{3}=\dfrac{\vec{x}+4\vec{x}}{5}$

§9. 直線の方程式

〔1〕 空間内の点の位置

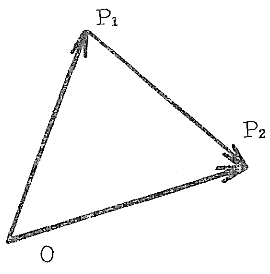
1° 2点間の距離と方向余弦

2点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ があたえられたとき，$\overrightarrow{P_1P_2}$ の大きさと方向余弦を求めよう。Oを原点とすると，

$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_1O}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$

となり，成分表示すると

$$\overrightarrow{P_1P_2}=-\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$



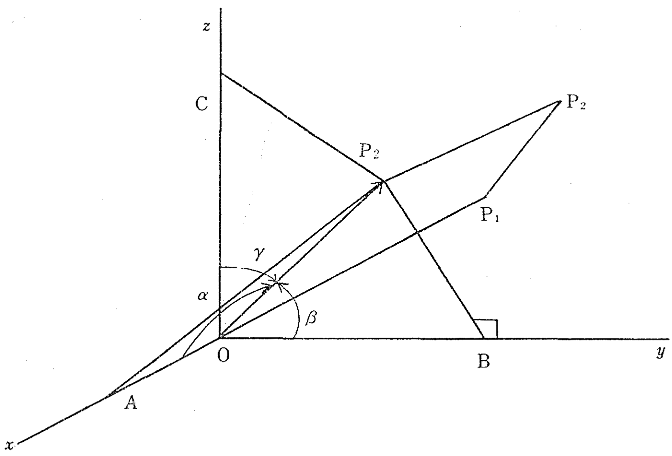
よって，$\overrightarrow{P_1P_2}$ の大きさは

$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

となり，$\overrightarrow{P_1P_2}$ の方向余弦は $\overrightarrow{P_1P_2}$ と x 軸，y 軸，z 軸となす角をそれぞれ α，β，γ とすると，次図のように，$\overrightarrow{P_1P_2}$ を P_1 が原点Oにくるように，平行移動して考えると，P_2' の x 軸，y 軸，z 軸への正射影をそれぞれ，A，B，Cとすると方向余弦は

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP_2'}|}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OP_2'}|}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$



$$\cos \gamma = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP_2'}}|} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

と表わされる。

(問 1)

A (1, 2, 3)　B (2, −1, 1)　C (0, 1, −2) とするとき，次のベクトルの大きさと方向余弦を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(問 2)

2点 A (1, 2, 3), B (3, 4, 1) から等距離にある点を x 軸上に求めよ。また，y 軸上，z 軸上ではどうか。

(問 3)

3点 A $(a,\ b,\ c)$, B $(b,\ c,\ a)$, C $(c,\ a,\ b)$ の作る三角形は正三角形であることを証明せよ。

(問 4)

3点 A (1, 1, 0)　B (−1, 2, 1)　C $(x,\ 0,\ -1)$ が同一直線上にあるための x の値を求めよ。

(問 5)

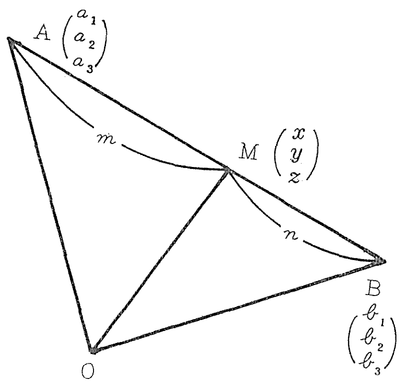
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z=c)^2=r^2$ を満足する点 P $(x,\ y,\ z)$ の集合はどんな図形になるか。ただし，a, b, c は定数とする。また，$x-y$ 平面，$y-z$ 平面，$z-x$ 平面との交わりはどんな図形になるか。

2° 分点の座標

平面上の場合と同様に，空間における2点間の分点の座標をベクトルを用いて，求めてみよう。まず，

2点 A $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を $m:n$ に内分する点Mの座標 $(x,\ y,\ z)$ を求めると，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{m+n}$$
$$=\frac{(m+n)\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{m+n}$$
$$=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\begin{pmatrix}\dfrac{na_1+mb_1}{m+n}\\ \dfrac{na_2+mb_2}{m+n}\\ \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\end{pmatrix}$$



よって，M の座標は $\overrightarrow{OM}$ の成分表示をそのまま用いて，

$$M\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

とあらわされる。

ここで，$m+n=1$ とおくと，さらに，かんたんにあらわすことができる。すなわち，

$n=1-m$ となり，

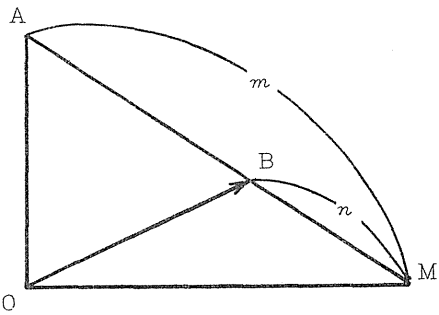
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$$
$$=\begin{pmatrix}(1-m)a_1+mb_1\\(1-m)a_2+mb_2\\(1-m)a_3+mb_3\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(問 1) 上の ① の表わし方で $m=0$，$m=1$，$m=2$，$m=0.5$，$m=-2$ のとき，点Mはどんな位置にあるか。

つぎに，外分点について求めてみよう。

$m>n$ として，$AM:MB=m:n$ となる外分点 M の座標は

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{m-n}$$
$$=\frac{(m-n)\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{m-n}$$
$$=\frac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}=\begin{pmatrix}\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n}\\ \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n}\\ \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\end{pmatrix}$$



となり，Mの座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

この結果を見ると，内分の場合とちがう点は n が $-n$ になっていることである。

このことをベクトルの比であらわせば，内分の場合は $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=m:n$，外分の場合は $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=m:-n$ となって，

$\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB}$ であるから，n を $-n$ でおきかえればよいことになる。$\overrightarrow{MB}$ と $\overrightarrow{AM}$ が同じ方向にあれば m と n は同符号，反対方向ならば異符号であることがわかる。

（問 2）

上の外分の例で $m<n$，かつ $m>0$ $n>0$ のとき，外分点Mの座標を求めよ。

（問 3）

②において，$m-n=1$ として，$\overrightarrow{OM}$ を m を用いて表わせ。

（問 4）

3点 A$(1,\ y,\ 3)$，B$(2,\ 3,\ z)$，C$(-1,\ 1,\ 2)$ が同一直線上にあるための y, z の値を求めよ。

（問 5）

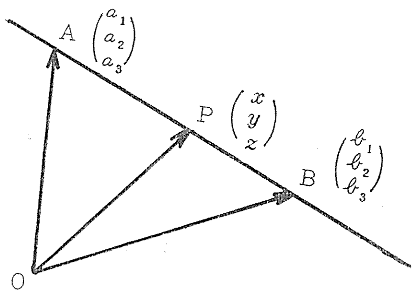
4面体の一頂点とそれに対する3角形の重心を結ぶ線分を 3:1 に分ける点はすべて一致することを証明せよ。

〔2〕 直線の方程式

1° 2定点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を通る直線の方程式

2定点 A, B を通る直線上の点は，線分 AB の内分点または，外分点となっている。したがって，直線 AB 上の任意の点Pの位置ベクトルを次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdots\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$



①を2点 A, B を通る直線のベクトル方程式という。

①を成分表示で表わすと，P$(x,\ y,\ z)$ として，Oを原点とすれば

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+k\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+k(b_1-a_1) \\ a_2+k(b_2-a_2) \\ a_3+k(b_3-a_3) \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

②を2定点A, Bを通る直線のベクトル方程式の成分表示という。

ベクトルの相等の意義を用いて

$$\begin{cases} x=a_1+k(b_1-a_1) \\ y=a_2+k(b_2-a_2) \\ z=a_3+k(b_3-a_3) \end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

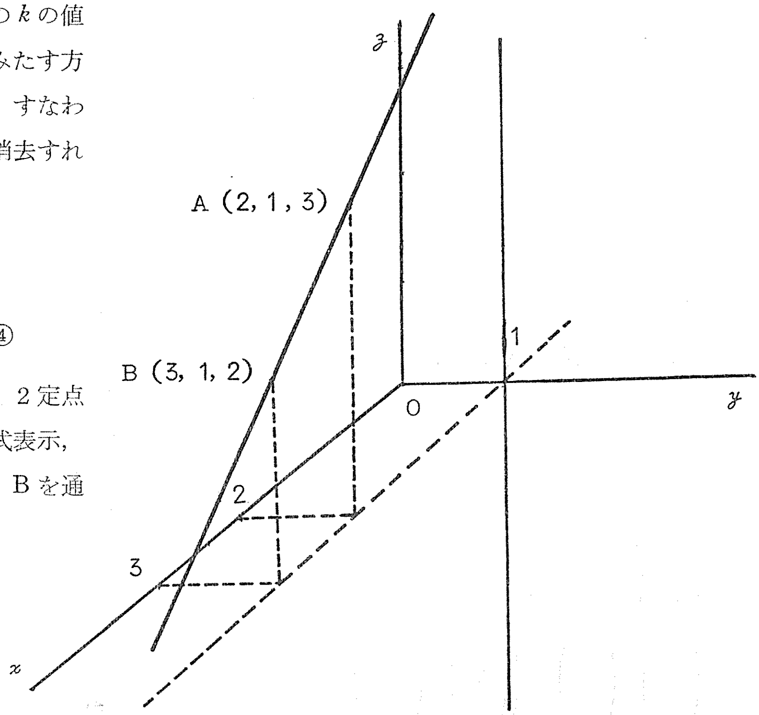
を，2定点A, Bを通る直線の媒介変数方程式という。(ただし，kは媒介変数)

(問 1)

①の方程式において，kがつぎのような値をとるとき，点Pはどのような位置にあるかを定め，③の方程式を用いて，点Pの座標を求め，①で考えた結果と比較せよ。

$k=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1.5,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},$

(問 1) の結果で判るように，kの値がきまると，点Pの直線AB上における位置がきまる。媒介変数とはこのような，はたらきをするものである。したがって，kの値と点Pの位置の間には1対1対応が存在する。



このことより，すべてのkの値に対して，点Pの座標がみたす方程式を作ることができる。すなわち，③の方程式よりkを消去すれば，

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2}$$

$$=\frac{z-a_3}{b_3-a_3}(=k)\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

となり，④の方程式を，2定点A, Bを通る直線の陰型式表示，または，単に，2定点A, Bを通る直線の方程式という。

ここで，分母=0 になる場合は分子=0 であると約束する。

たとえば，2定点 A

(2, 1, 3), B (3, 1, 2) を通る直線の方程式を④の形で求めると,

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z-3}{2-3}$$

となって，第二項は分母=0 となる。このときは,

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{z-3}{2-3} \quad \text{かつ} \quad y-1=0$$

すなわち，$x+z=5$, かつ $y=1$ という方程式となり，前頁の図のような直線である。

$y=1$ という平面上で $x-z$ 平面で $x+z=5$ という直線を $y=1$ という平面へ平行移動したものと考えることができる。

(問 2)

2定点 A $(a_1, a_2, 0)$, B $(b_1, b_2, 0)$ を通る直線の方程式を上の順序にしたがって求めて，$x-y$ 平面上の2定点 A (a_1, a_2), B (b_1, b_2) を通る直線の方程式と比べよ。

(問 3)

④の方程式で，全ての分母=0 となることがあるか，2つの分母=0 となるときは，どんな図形となるか。

(問 4) 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

①	A (3, 4, 9)	B (1, −2, 4)	②	A (4, 3, 1)	B (1, −6, 4)
③	A (0, 0, 0)	B (1, 2, 3)	④	A (4, 3, 1)	B (1, 2, 1)
⑤	A (4, 3, 1)	B (2, 3, 1)	⑥	A (0, 1, 0)	B (0, −1, 0)

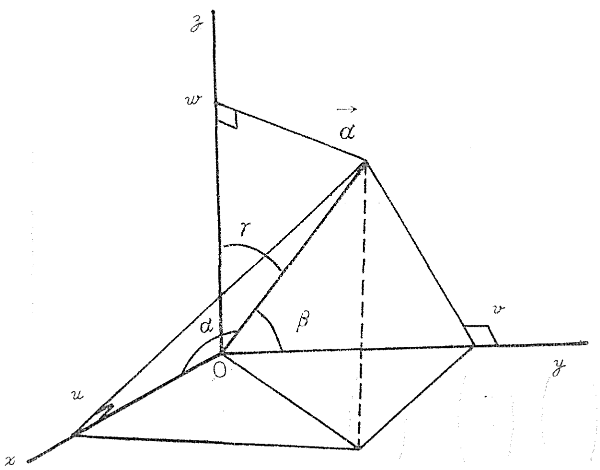
(問 5) 次の方程式をみたす直線の見取図をかけ。

① $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y+1}{3+1}=\dfrac{z+2}{-1+2}$ ② $x+y=2$ かつ $z=1$ ③ $x=1$ かつ $y=2$

2° 1定点を通り定方向をもつ直線の方程式

ベクトルは方向と大きさをもつ量であるが，その方向の表わし方について，つぎのように表わす。

$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{\alpha}$ の方向は $\vec{\alpha}$ と x 軸，y 軸，z 軸とのなす角を図のように，α, β, γ とすれば，方向余弦は$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$で表わされることは，前節でのべたが，方向余弦を計算する手間をはぶくために，平面上の場合と同様につぎのような方向比という概念を考えると，便利である。



すなわち，

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}:\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}:\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=u:v:w$$

とあらわされ，$\vec{\alpha}$ の方向余弦の比は，成分の比でかんたんにあらわされることがわかる。これを $\vec{\alpha}$ の方向比 $u:v:w$ とかく。今後はベクトルの方向を考えるときは，方向比を用いることが多い。

ここで，$\vec{\alpha}$ の方向と方向比は１対１の対応をしないことに注意をする必要がある。対応としては

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\underset{(|\vec{\alpha}|\text{ が求められれば})}{\rightleftarrows}\overset{\text{方向余弦}}{(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)}\rightleftarrows\overset{\text{方向比}}{u:v:w}$$

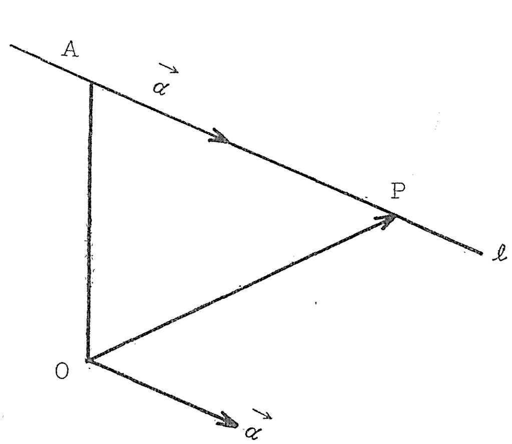
たとえば $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$　$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$　において，$\vec{\alpha}$ の方向比は $1:-2:3$，$\vec{\beta}$ の方向比は $-1:2:-3=1:-2:3$ となって，$\vec{\alpha}$ と $\vec{\beta}$ の方向比が等しくなる。

$\vec{\alpha}$ ↘ 方向比 $1:-2:3$ ↗ $\vec{\beta}$

また，$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$　$\vec{\delta}=\begin{pmatrix}3\\-6\\9\end{pmatrix}$　なども方向比は $1:-2:3$ となり，一般に原点対称なベクトルの方向比は全て等しくなる。このことより，$\vec{\alpha}$ の方向を考えるには，成分と方向比とをあわせて考えればよいことがわかる。

この方向比を用いて，直線の方程式を考えよう。

定点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ の方向に延長した直線 l 上の任意の点 P (x, y, z)，原点をOとすると，



$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+k\,\vec{\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

k を任意の実数とすると，A を通り，$\vec{\alpha}$ の方向に延長（負の方向を含む）した直線のベクトル方程式となる。

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

② を媒介変数方程式であらわすと，

$$\begin{cases} x=a_1+k\,u \\ y=a_2+k\,v \\ z=a_3+k\,w \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となり，③ の方程式より，k を消去すると，

$$\frac{x-a_1}{u}=\frac{y-a_2}{v}=\frac{z-a_3}{w}\,(=k)\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④ を直線 l の陰形式表現，または，単に直線 l の方程式という。ここで，u，v，w のいづれかが，0 であるときは，分子$=0$ と考える。このことは，前節の 2 定点を通る直線の方程式の場合と同様である。

④ の方程式の分母は，$\vec{\alpha}$ の方向比であることがわかる。このことより，④ の方程式であらわされる直線の方向比は u，v，w であるという。直線はベクトルとちがって，有向線分ではないから，方向比を既約で $u>0$ という形であらわせば，直線と方向比の間に 1 対 1 の対応をつけることができる。

(問 1)

点 (1，-1，2) を通り，次の方向比をもつ直線の方程式を求めよ。

① 1：2：3　　② 3：0：1

③ -1：1：-2　　④ 1：-1：2

(問 2)

次の点を通り，$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ に平行な直線の方程式を求めよ。

① (0，1，3)　　② (0，0，0)

③ (1，-1，2)　　④ (0，1，0)

(問 3)

次の直線の方程式を求めよ。

① 点 (1，2) を通り，次の方向余弦をもつ直線

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(1，0)　　$\left(\frac{-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

② 点 (1，2，3) を通り，方向余弦 $\left(\frac{3}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{2}{7}\right)$

③ 点 (3，5，2) を通り，方向比が 1：2：3

(問 4)

次の直線の方向比，方向余弦を求めよ。また，方向比の等しいものがあれば，それを求めよ。

① $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$

② $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{z+2}{-1}$

③ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=z-2$

〔3〕 2直線の位置関係

2直線 l_1 l_2 の方向余弦をそれぞれ，$(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1)$，$(\lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2)$ とすれば，

$$l_1\ ;\ \frac{x-a_1}{\lambda_1}=\frac{y-b_1}{\mu_2}=\frac{z-c_1}{\nu_1}$$

$$l_2\ ;\ \frac{x-a_2}{\lambda_2}=\frac{y-b_2}{\mu_2}=\frac{z-c_2}{\nu_2}$$

となり，l_1，l_2 のなす角 $\widehat{l_1, l_2}=\theta$ を求めよう。

空間における2直線のなす角は，一つの直線を平行移動して，他の一直線に交わらせ，その交線が作る平面上で l_1，l_2 のなす角を考える。したがって，$l_1 \parallel l_2$ のときは，l_1，l_2 のなす角は考えられないので，l_1，l_2 の位置関係は $l_1 \parallel l_2$ と $l_1 \not\parallel l_2$ に分けられる。

1° 平行条件

$l_1 \parallel l_2$ ならば l_1 と l_2 の方向余弦は等しくなるかまたは，向きが反対になる。

$l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow$ 同じ向きに平行

$$\lambda_1=\lambda_2,\quad \mu_1=\mu_2,\quad \nu_1=\nu_2$$

反対向きに平行

$$\lambda_1=-\lambda_2,\quad \mu_1=-\mu_2,\quad \nu_1=-\nu_2$$

となる。これをまとめてかくには，比であらわすと便利である。すなわち，

$$l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow \lambda_1:\lambda_1\ \nu_1=\lambda_2:\mu_2:\nu_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

となる。最後の場合は，分母$=0$ ならば，分子$=0$ と約束する。

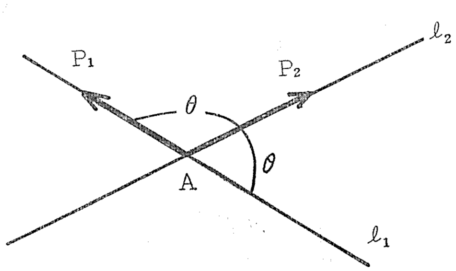
(問 1)

2直線の平行条件を方向比を用いてあらわすと，どういえばよいか。

2° 平行でない場合

l_1，l_2 を平行移動して，その交点を A とする。図のように単位ベクトル，$\overrightarrow{AP_1}$，$\overrightarrow{AP_2}$ をとれば，

$$\overrightarrow{AP_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \nu_1\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AP_2}=\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\\ \nu_2\end{pmatrix}$$



となる。

したがって，$\widehat{l_1, l_2}=\theta$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}$ の内積より，次のようにして求められる。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}|\ |\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}|\cos\theta=\cos\theta$…………①

よって，成分表示すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}=(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1)\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\\ \nu_2\end{pmatrix}=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2\text{…………②}$$

①＝② だから，

$\cos\theta=\nu_1\nu_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2$…………③

となる。したがって，θ は ③ の値によって，$\cos\theta>0$ なら鋭角，$\cos\theta=0$ なら直角，$\cos\theta<0$ なら鈍角を示すことがわかる。

このことより，l_1，l_2 が直交する条件が求められる。すなわち，

$l_1\perp l_2 \Longleftrightarrow \cos\theta=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0$

である。

これを２直線 l_1，l_2 の直交条件という。

（問 2）

２直線 l_1，l_2 の方向比が $u_1:v_1:w_1$ および，$u_2:v_2:w_2$ であるとき，l_1 と l_2 の平行条件は，

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{w_1}{w_2}\quad（同じ向き）$$

$$\frac{u_1}{-u_1}=\frac{v_1}{-v_2}=\frac{w_1}{-w_2}\quad（反対向き）$$

l_1 と l_2 の直交条件は

$u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2=0$

であることを証明せよ。

（問 3）

２直線

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

$$\frac{x-x_1}{c-b}=\frac{y-y_2}{c-a}=\frac{z-z_2}{a-b}$$

は直交することを示せ。

（問 4）

次の２直線のなす解を求めよ。

① $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=z$，$x=-y=-z$

② $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}$, $2(x+2)=\sqrt{3}(y-\sqrt{2})$

③ $\sqrt{2}x=-\sqrt{2}(y-1)$, $\dfrac{x+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

④ 原点と（2, 3, 1）を通る直線と，2点（1, 1,0)，(2, 0, 1）を通る直線

（問 5)

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ に直交して，点（1, 2, 3）を通る直線および，(3, 2, 1）を通って，平行な直線の方程式を求めよ。

（問 6)

2直線

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$$

に垂直で原点を通る直線の方程式を求めよ。

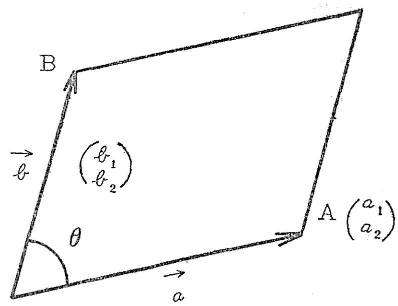
§10. 平行六面体の体積

〔1〕平行六面体の体積

平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $\vec{a}\neq\vec{b}$ ならば，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は必ず一つの平行四辺形を作ることがいえた。

2次元ベクトル

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$



が作る平行四辺形の面積Sは，Sに符号を入れて

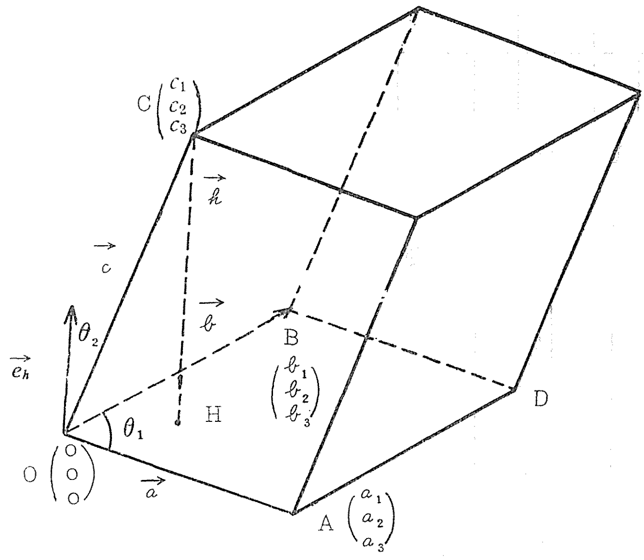
$$S=|\vec{a},\ \vec{b}|=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$ と表わされる

ことは前節で述べたところであるが，空間のベクトル（3次元ベクトル）$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がそれぞれ平行でなければ，三つのベクトルは次の図のように一つの平行六面体を作る。この体積を記号 $|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$ とかくことにする。

Cより四辺形 OADB へ下した垂線の足をHとすると，

$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|=|\vec{a},\ \vec{b}|\times|\overrightarrow{CH}|$…………①

となり，$|\overrightarrow{CH}|$ が求められれば，$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$ は求められる。ここで注意しておきたいことは，平行四辺形の場合と同様に，$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$ には正，負の符号がついていることである。一般にいう体



積の場合は，求められた結果に絶対値をつけて考えればよい。

①より，$\overrightarrow{CH}$ の長さがわかれば，体積は求められる。

$\overrightarrow{CH}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{e_h}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とする。$\vec{e_h}$ は次の条件をみたす。

$$\begin{cases}|\vec{e_h}|=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \vec{e_h}\cdot\vec{a}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ \vec{e_h}\cdot\vec{b}=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

②，③，④を成分表示すれば

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$

$$a_1x+a_2y+a_3z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③'$$

$$b_1x+b_2y+b_3z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④'$$

③′，④′より，x，y を求めると，

$$\begin{cases}a_1x+a_2y=-a_3z \\ b_1x+b_2y=-b_3z\end{cases}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-\begin{vmatrix}a_3 & a_2\\ b_3 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z \qquad y=\frac{-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

②′へ代入して，

$$\left\{\frac{\begin{vmatrix}a_3 & a_2\\ b_3 & b_2\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{vmatrix}^2}+\frac{\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}+1\right\}z^2=1$$

$$z^2=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

ここで，$\sqrt{\text{分母}}=\mathrm{D}$ とおくと，

$$z=\frac{\pm\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}$$ となり，これを⑤へ代入して

$$x=\frac{\mp\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}=\frac{\pm\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}$$

$$y=\frac{\mp\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}=\frac{\pm\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}$$

よって，$\vec{e_h}$ はつぎのように求められた。

$$\vec{e_h}=\begin{pmatrix} \dfrac{\pm\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}} \\ \dfrac{\pm\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}} \\ \dfrac{\pm\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$$

（複号同順）

この２つのベクトルは絶対値等しく，向きが反対で，ともに ▱OADB に直交するから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の長さをとるには，

$\vec{c}\cdot\vec{e_h}=|\vec{c}|\cdot|\vec{e_h}|\cos\theta_2$ または $=|\vec{c}|\cdot|\vec{e_h}|\cos(\theta_2+\pi)$

となって，$|\vec{c}\cdot\vec{e_h}|$ をとればともに $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の長さとなるので，$\vec{e_h}$ としてどちらをとっても $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ の長さを求めることはできる。よって，ここでは，$\vec{e_h}$ の成分として，＋の方の組みをとって考えることにする。

これを用いて，

$\vec{c}\cdot\vec{e_h}=|\vec{c}|\cdot|\vec{e_h}|\cos\theta_2=|\vec{c}|\cos\theta_2=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$（符号を含む）よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=(c_1,\ c_2,\ c_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=c_1x+c_2y+c_3z$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}c_3\right\}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_3+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

となる。

つぎに，平行四辺形 OADB の面積は

$$|\vec{a},\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ \sin\theta_1\qquad(0<\theta_1<\pi)$$

$$=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\cos\theta_1}$$

$$=|a|\,|b|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a},\ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$$

$$=\sqrt{(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2b_2a_3b_3)+(a_3^2b_1^2+b_1^2b_3^2-2a_1b_1a_3b_3)}$$

$$=\sqrt{(a_1b_2-b_2a_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2}$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2}=\mathrm{D}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，平行六面体の体積は

$$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|=|\vec{a},\ \vec{b}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$$

⑥，⑦を代入して

$$=\left\{\begin{vmatrix}a_2, & a_3\\ b_2, & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right\}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_2\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

と表わす。⑧の形を３次の行列式という。$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で作る平行六面体の体積をこのような形で表わすことによって，見通しのよいことが多いので，この表わし方を用いる。

ここで，注意することは，⑧の形は平行六面体の体積に符号がついたものであるから，一般の意味では絶対値をつければよい。

（問 1）

次の行列式を展開せよ。

$$\begin{vmatrix}a_2, & a_3\\ b_2, & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3$$

（問 2）

⑧の定義より，つぎのベクトルが作る平行六面体の体積を３次の行列式で表わせ。

① $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

② $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

〔2〕 3次の行列式

前節において，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$の作る平行六面体の体積を3次の行列式を用いて表わしたが，ここでは，その意味について考えよう。

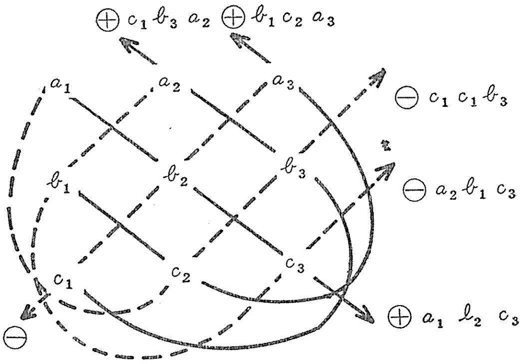
まず，3次の行列式の展開を定義しよう。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

$$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と展開される。この結果より，3次の行列式の展開のし方を，2次の行列式の展開のし方と同様に，右の図のように考えると，便利である。



(問 1)

上の展開法を用いて，次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(問 2)

次の行列式を展開して比べよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(問 2) の結果，明らかなように，主対角線に対して，右上と左下を入れかえた行列式の値は等しいことがわかる。ここで，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$の作る平行六面体の体積を，つぎのような記号で表わす。

$$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

この表現は，ベクトルの成分が明らかなときには，$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$ で3次の行列式を表わすことにする。

このことによって，行列式の性質がかんたんに説明される。

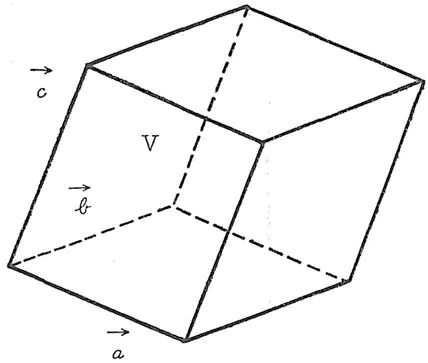
性質 1　行列式の値は，その行と列を入れかえてもかわらない。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

性質 2　行列式の一つの行（または列）のすべての成分に同一の数 k をかけて得られる行列式の値は，もとの行列式の k 倍に等しい。

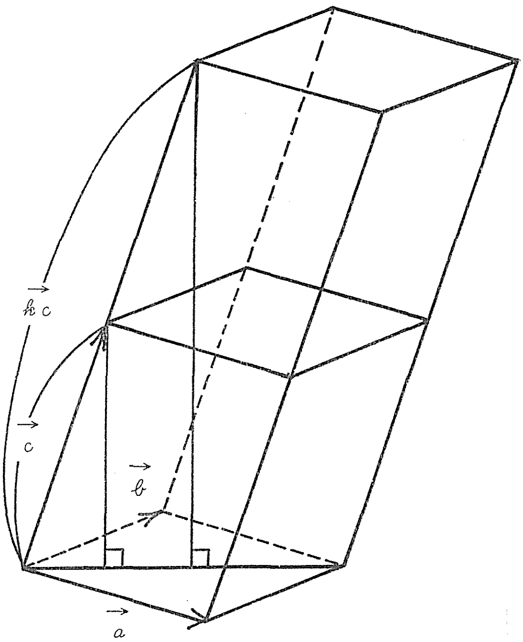
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

これは $|\vec{a},\ \vec{b},\ k\vec{c}| = k|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$ とかけるので，次の図より明らかである。



$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$

$|\vec{a},\ \vec{b},\ k\vec{c}|$



は右図のように底面積が等しく高さが k 倍になるので，体積は k 倍になる。
すなわち，
$k|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$
となる。

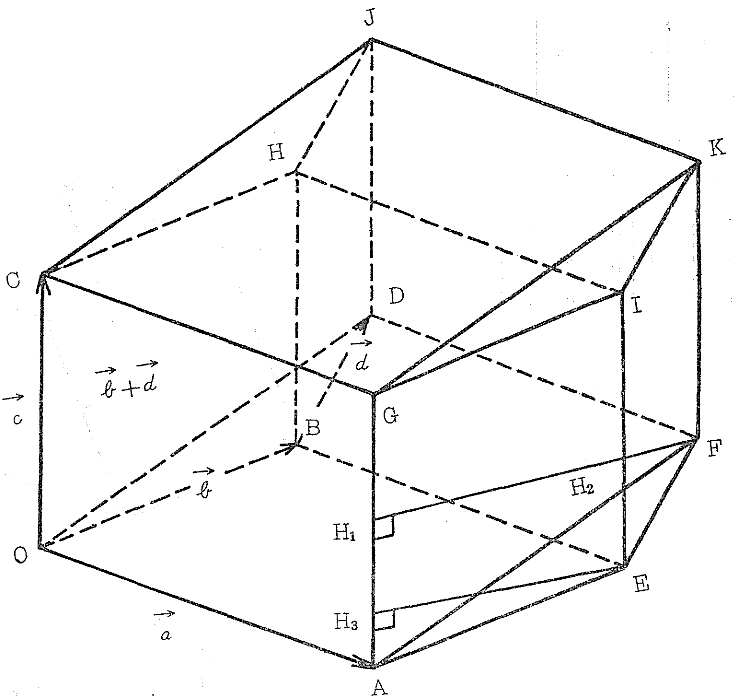
性質 3　行列式の一つの行（または，列）の成分が，二つのベクトルの和の形をしていれば，二つの行列式の和の形に表わされる。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

または

$$|\vec{a},\ \vec{b}+\vec{d},\ \vec{c}| = |\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}| + |\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}|$$

ということを意味している。図で表わすと，つぎのようになる。



上図より，$|\vec{a},\ \vec{b}+\vec{d},\ \vec{c}|$ は OAGC−FKJD の体積であり，$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|$ は OAGC−EIHB，$|\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}|$ は EIHB−FKJD の体積である。これらの体積は底面を OAGC と考えれば，高さは FH_1，EH_3，FH_2 にそれぞれなってくる。したがって，体積は

$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|=\mathrm{OAGC}\times EH_3$

$|\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}|=\mathrm{OAGC}\times FH_2$

$|\vec{a},\ \vec{b}+\vec{d},\ \vec{c}|=\mathrm{OAGC}\times FH_1$

$FH_1=EH_3+FH_2$ であるから，

$|\vec{a},\ \vec{b}+\vec{d},\ \vec{c}|=|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}|+|\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}|$ が成り立つ。

性質 4　行列式の二つの行（または列）の成分が等しければ，その行列式の値は 0 である。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

これをベクトルで書くと，

$|\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{b}|=0$ ということである。

すなわち，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{b}$ が作る平行六面体は存在しないので，当然，体積は 0 になる。

（問 3）

一つの行（または列）の成分がすべて 0 であるような行列式の値は 0 であることを示せ。

（問 4）

次のような計算をしてよい理由をのべよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x^2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & x^2-1 & 3 \end{vmatrix}$$

(問 5)

次の行列式の計算の理由をのべよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

〔3〕 3次元のベクトル

3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が同一平面上にあれば，$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|=0$ となる。このとき，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ ならば $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ となる実数 p, q が一意にきまることは，すでに，平面のベクトルの際に述べた。すなわち，平面上の任意のベクトルは，同じ平面上の平行でない二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の一次結合，

$p\vec{a}+q\vec{b}$ (p, q は実数)

という形で一意に表わされるということである。このとき，2つのベクトルで表わされるので，平面上のベクトルを2次元のベクトルという。このとき，

$|\vec{a}, \vec{b}| \neq 0$ であることがいえた。つぎに $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| \neq 0$ であるとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にないので，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は平行六面体を作っている。このとき，

$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\vec{0}$ …………①

となるためには $p=q=r=0$ 以外にはない。

もし，どれか0でない係数があるとするとたとえば，$p \neq 0$ ならば

$$a=\frac{-q}{p}\vec{b}-\frac{r}{p}\vec{c}$$

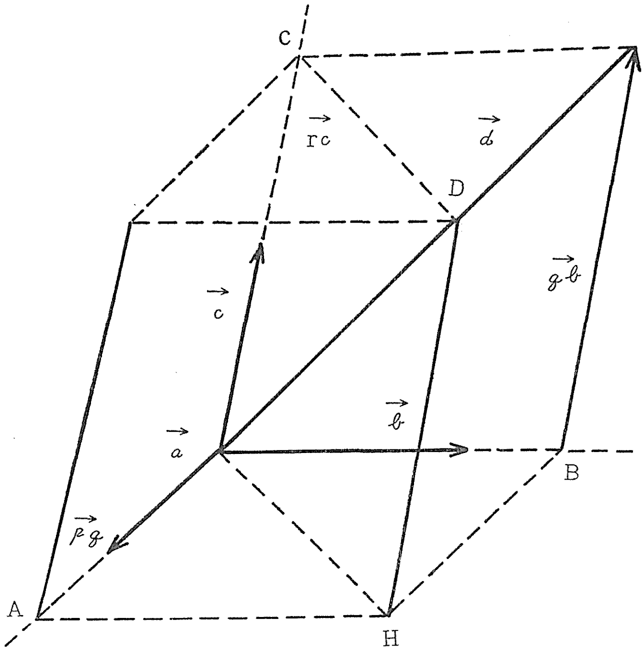
となって，$\vec{a}$ は $\vec{b}, \vec{c}$ の作る平面上にあって $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| \neq 0$ に反する。したがって，p, q, r はすべて 0 のときのみ①は成り立つ。このとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるという。そうでないとき，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次従属という。

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次独立であれば，空間の任意のベクトル $\vec{d}$ をとると，

$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ …………②

と表わせる実数 p, q, r が $\vec{d}$ に対して，只一組存在する。

その理由は，次の図より，空間上の任意のベクトル $\vec{d}$ が ② の形に表わされることがいえる。すなわち，Dより $\vec{c}$ に平行線を引き，$\vec{a}, \vec{b}$ が作る平面との交点をHとする。Hから $\vec{b}, \vec{a}$ に平行線を引き，$\vec{a}, \vec{b}$ の延長との交点をそれぞれA，Bとするさらに HO に平行に D から平行線を引いて，$\vec{c}$ の延長との交点を c とすると



$\overrightarrow{OA}=p\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=q\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=r\vec{c}$

となる p, q, r が存在し,

$\vec{d}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ …………③

と表わされる。

さらに, p, q, r が一意である理由は,

$\vec{d}=p'\vec{a}+q'\vec{b}+r'\vec{c}$ …………④

と別に表わされたとすると,

③－④

$(p-p')\vec{a}+(q-q')\vec{b}+(r-r')\vec{c}=0$ となり, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が一次独立だから,

$p-p'=0$, $q-q'=0$, $r-r'=0$

すなわち, $p=p'$, $q=q'$, $r-r'$ となって p, q, r は一通りしか存在しないことがわかる。

このように, 空間のベクトルは, 3個の一次独立なベクトルの一次結合であらわされることがわかるから, 空間のベクトルを3次元のベクトルとよぶ。

(問 1)

座標軸の単位ベクトル

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

は一次独立であることを示せ。

(問 2)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

とするとき，次のベクトルを，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の一次結合で表わせ

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \qquad \vec{e}=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{f}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{g}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

(問 3)

x, y, z についての連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

において，根 x, y, z はつぎのように表わされることをたしかめよ。

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

§11. 平面の方程式

〔1〕 平面の方程式

1° 3点を通る平面の方定式

3点A (a_1, a_2, a_3), B (b_1, b_2, b_3), C (c_1, c_2, c_3) を通る平面の方程式は，つぎのようにして求める。

平面は相異なる3点によって，一意に決まるから，その平面をα，原点をOとすると，α上の任意の点P (x, y, z) の位置ベクトルは，つぎのように表わされる。

Pはα上にあるから

$\overrightarrow{AP}=l\,\overrightarrow{AB}+m\,\overrightarrow{AC}$

となる，l, m が存在する。

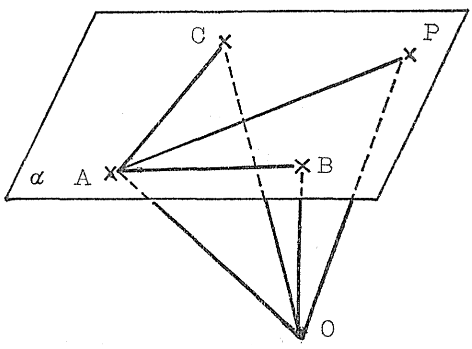
Oに対する位置ベクトルで表わすと

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=l\,(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+m\,(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \ \overrightarrow{OP}=(1-l-m)\overrightarrow{OA}+l\,\overrightarrow{OB}+m\,\overrightarrow{OC}$

ここで，$1-l-m=\lambda$, $l=\mu$, $m=\nu$

とおきかえると，



$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$……①

かつ，$\lambda+\mu+\nu=1$

①を相異なる3点A，B，Cを通る平面αのベクトル方程式という。

これを成分表示すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\cdots\cdots②$$

これを，成分ごとに表わすと

$$\begin{cases} x=\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1 \\ y=\lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2 \cdots\cdots③ \\ z=\lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3 \end{cases}$$

となり，③を平面αの媒介変数方程式という。ここで，λ，μ，νは$\lambda+\mu+\nu=1$をみたす任意の実数であるから，λ，μ，νを消去すれば，x，y，zに関する方程式が作られる。消去をかんたんにする方法として，前節の行列式を用いる。

3点A，B，Cが作る平面上の点Pをとると，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$が作る平行六面体の体積が0になるから，

$|\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}|=0$

すなわち，

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \\ z-a_3 & b_3-a_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④の行列式を展開すると，

$(x-a_1)(b_2-a_2)(c_3-o_3)+(y-a_2)(b_3-a_3)(c_1-a_1)+(z-a_3)(c_2-o_2)(b_1-a_1)-(c_1-a_1)(b_2-a_2)$

$(z-a_3)-(b_1-a_1)(y-a_2)(c_3-a_3)-(x-a_1)(b_3-a_3)(c_2-a_2)=0$

となり，これをx，y，zについて，整理すると，x，y，zの一次方程式

$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$…………⑤

（ただし，A，B，C，Dは定数とする。）

となる。⑤を平面αの陰形式表示，または，平面αの一般形という。

（問 1）

次の3点を通る平面の方程式を求めよ。

① A(−3, −1, 2), B(1, 4, 0), C(0, −2, 1)

② A(1, 2, 0), B(3, −1, 2), C(2, 4, 3)

③ A(1, −1, 1), B(2, 0, 0), C(−1, 1, 3)

④ A(3, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0. 0, 1)

（問 2）

A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

となることを証明せよ。

(問 3)

次の平面と座標の交点の座標を求めよ。

① $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$

② $2x-3y+z=6$

③ $-x+2y-3z=1$

(問 4)

$x-y$ 平面は3点O(0, 0, 0), A(a, b, 0), B(c, d, 0) を通る平面であると考えられる。これを用いて, $x-y$ 平面の方程式を求めよ。

同様にして, $y-z$ 平面, $z-x$ 平面の方程式を求めよ。

(問 5)

(問 1) で求めた平面と x y 平面, $y-z$ 平面, $z-x$ 平面の交線の方程式を求めよ。

2° 定点 A(a_1, a_2, a_3) を通り, 定方向をもつ平面の方定式

平面の方向は, 平面に直交するベクトルの方向を用いる。平面に平行なベクトルの方向は一通りにきまらないが, 平面に垂直なベクトルの方向は一通りにきまることを用いるのである。

ヘッセの標準形 (Hesse)

原点からの距離が p で, その線分に直交する平面の方程式を考えよう。

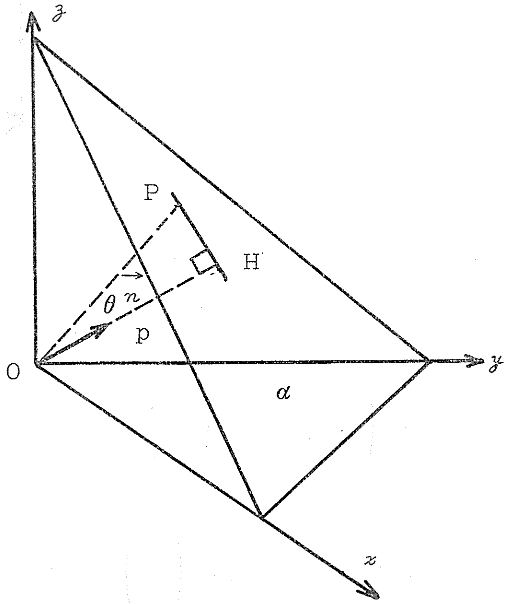
図のように,

$|\overrightarrow{OH}|=p$, $\overrightarrow{OH}\perp\alpha$ となる平面 α をとり, Oより下した垂線の足を H とする。α 上の任意の点をP(x, y, z) とし, $\overrightarrow{OH}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{n}$ とすると,

$$\mathrm{OH}=p\vec{n}$$

であり, ∠PHO=∠R であるから,

$$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{OP}|\,|\vec{n}|\cos\theta$$
$$=p\cdots\cdots①$$



これは, α 上の任意の点Pがみたす, ベクトル方程式である。

①を成分表示する,

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\qquad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1 \text{ とすると}$$

①の方程式は

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=p$$

よって，

$$\lambda x+\mu y+\nu z=p\cdots\cdots\cdots②$$

②を原点Oからの距離p，ベクトル$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$に直交する平面の方程式といい，ヘッセの標準形とよぶ。

（問 1）

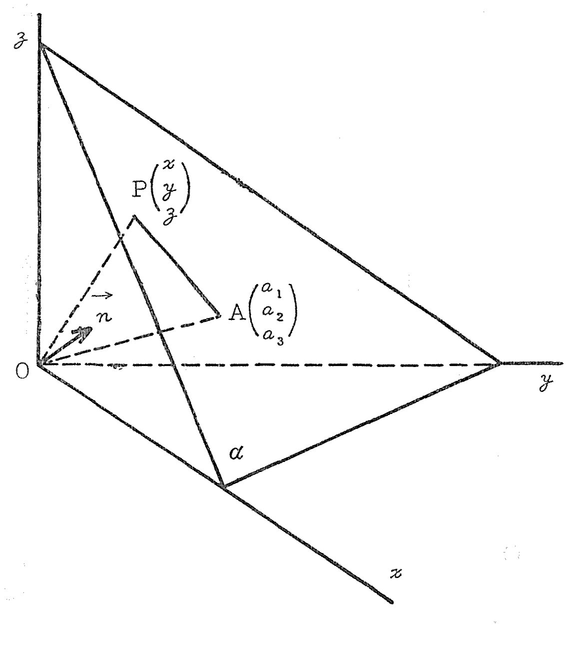
２次元の平面におけるヘッセの標準形を求めよ。

定点$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$を通り，$\vec{n}$に直交する平面の方程式を求めよう。

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\qquad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

求める平面α上の任意の点を$P(x,\ y,\ z)$とすると

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{n}=0\cdots\cdots\cdots\cdots③$$



③を成分表示すると

$$(x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=0$$

したがって，

$$\lambda(x-a_1)+\mu(y-a_2)+\nu(z-a_3)=0\ \cdots\cdots④$$

これが平面αの陰形式表示という。

④を一般形になおして，

$$\lambda x+\mu y+\nu z-(\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3)=0$$

とするとき，定数項はつぎのように考えられる。

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3=(a_1,\ a_2,\ a_3)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\vec{n}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|$$

となって，④はヘッセの標準形になることがわかる。

(問 2)

$\mathrm{H}=(u,\ v,\ w)$ として，Hを通り $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に直交する平面の方程式を求めよ。

ただし，Oは原点とする。

(ヒント)

求める平面上の任意の点をPとし $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}}=0$ より導け。

(問 2)の結果より，平面の方程式を求めるときに，方向余弦を用いないで，方向比を用いて表わすことができることがわかった。すなわち，$\mathrm{H}(u,\ v,\ w)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の方向比は $u:v:w$ であるから，Hを通り $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に直交する平面の方程式は，

$u(x-u)+v(y-v)+w(z-w)=0$ ……………⑤

と表わされる。

さらに，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に直交する平面の方程式は

$v(x-a_1)+v(y-a_2)+w(z-a_3)=0$ ……………⑥

のように表わされる。

(問 3)

次の平面の方程式を求めよ。

① $\mathrm{H}(1,\ 2,\ 3)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直な平面

② $\mathrm{H}(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直な平面

③ $\mathrm{H}(1,\ 0,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直な平面

④ $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{H}(3,\ 2,\ 1)$ とし，Aを通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直な平面

⑤ $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{H}(a,\ b,\ c)$ とし，Aを通り，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直な平面

(問 4)

$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ なる平面と，$\vec{g}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\end{pmatrix}$ とは直交することを証明せよ。

(註) $\vec{g}$ をこの平面の勾配ベクトルという。

(問 5)

次の平面の方程式を求めよ。

① $\mathrm{A}(a,\ a,\ 0)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な平面

② $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 3,\ 5)$ のとき，Aを通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な平面

③ $\mathrm{N}(7,\ -4,\ 3)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{B}(5,\ 6,\ 0)$ とする。

Nを通り，直線ABに垂直な平面。

3° 平面の方程式の一般形

空間における平面の方程式は，x，y，z の一次方程式

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$$

ただし，A，B，Cが同時に0にはならない。

という形で表わされることは，前節までで，明らかである。

ここでは，係数A，B，C，Dがもつ意味について，まとめてみよう。

$$\alpha : \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$$

$$\vec{g}=\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

とする。

（性質 1）　$\vec{g}\perp\alpha$

（証明）　α 上の任意の相異なる3点 $\mathrm{P}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{Q}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{R}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする。

$$\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}a_2+\mathrm{C}a_3+\mathrm{D}=0$$

$$\mathrm{A}b_1+\mathrm{B}b_2+\mathrm{C}b_3+\mathrm{D}=0$$

$$\mathrm{A}c_1+\mathrm{B}c_2+\mathrm{C}c_3+\mathrm{D}=0$$

となる。

$\vec{g}\perp\alpha$ であるためには，α 上の2交線と $\vec{g}$ が直交すればよいから，$\vec{g}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\vec{g}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ をいえばよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=\begin{pmatrix} c_1-b_1 \\ c_2-b_2 \\ c_3-b_3 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\vec{g}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\cdot\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}=\mathrm{A}(b_1-a_1)+\mathrm{B}(b_2-a_2)+\mathrm{C}(b_3-a_3)=\mathrm{A}b_1+\mathrm{B}b_2+\mathrm{C}b_3\\ &\quad-(\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}a_2+\mathrm{C}a_3)=-\mathrm{D}-(-\mathrm{D})\\ &=0\end{aligned}$$

$\therefore\ \ \vec{g}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

同様にして，

$\vec{g}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ がいえる。

したがって，$\vec{g}\perp\alpha$ である。

（問 1）

上の証明で，$\vec{g}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ をたしかめよ。

（問 2）

次の平面に直交するベクトル（勾配ベクトル）を求めよ。また，直交する単位ベクトルを求めよ。

① $2x-3y-z+2=0$

② $-x+2y+z-5-0$

③ $\sqrt{2}x-y+\sqrt{3}z-1=0$

④ $2x-y+1=0$

(性質 2) 原点から平面αまでの距離p

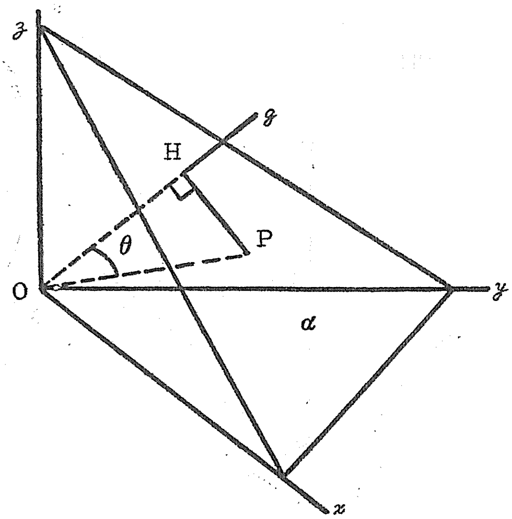
α上の任意の点$P(x, y, z)$，Oよりαへの垂線の足をHとすれば，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OH}=k\vec{g}$となるから，

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}=|\overrightarrow{OP}|\times|\vec{g}|\times\cos\theta$

$=\pm|\overrightarrow{OH}|\times|\vec{g}|=p\cdot|\vec{g}|$

よって，$p=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}}{|\vec{g}|}$となる。



ここで，pはθが鋭角ならば正，鈍角ならば負となる符号がついているので，距離を求めるためには絶対値をとればよい。したがって，原点からの距離$|p|$は

$$|\overrightarrow{OH}|=|p|=\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}|}{|\vec{g}|}$$

成分であらわせば，

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=Ax+By+Cz=-D$$

$$|\vec{g}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$\therefore\quad |p|=\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}|}{|\vec{g}|}=\frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

となる。

(問 3)

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}>0$，$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}<0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{g}=0$になるとき，$\vec{g}$と$\alpha$との位置関係はどうなっているか。

(問 4)

原点から次の平面までの距離を求めよ。

① $2x-y+z+2=0$

② $3x+2y-2z+1=0$

③ $x+2y-3z-4=0$

④ $x+2y-4=0$

⑤ $2x-5=0$

（問 5）

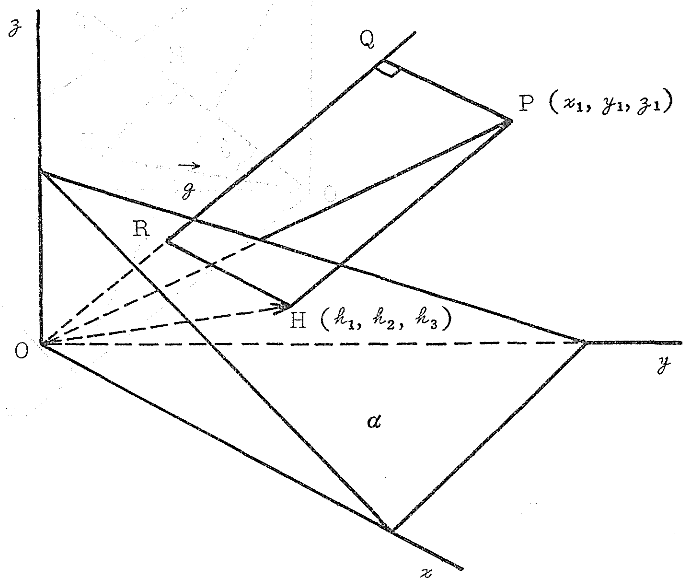
原点以外の点 $P(x_1, y_1, z_1)$ より，平面 $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ に至る距離 α を次の順序にしたがって求めよ。

(1) $\overrightarrow{PH} \perp \alpha$

(2) $|\overrightarrow{OR}|$ を求めよ　（$|\quad|$を符号のついた距離と考えよ）

(3) $|\overrightarrow{OQ}|$ を求めよ

(4) $|\overrightarrow{PH}|=d$ とし，$d=|\overrightarrow{OQ}|-|\overrightarrow{OR}|$ として，d の値を求めよ。



（問 6）

次の点から平面への距離を求めよ。

① $P(1, 2, 3)$

$\alpha: x+2y+3z-1=0$

② $P(-1, 2, -3)$

$\alpha: x+2y+3z-1=0$

③ $P(1, 2, 0)$

$\alpha: 2y+3z-1=0$

④ $P(0, 0, 3)$

$\alpha: x+2y-1=0$

（性質 3）　ヘッセの標準形

（性質 2）より，平面 α 上の任意の点 $P(x, y, z)$ とすると，$\vec{g}\cdot\overrightarrow{OP}=-D$ となることがわかった。したがって，原点からの距離は係数 A，B，C，D で表わされる。すなわち，

$\dfrac{|-D|}{|\vec{g}|}$ となる。$|\vec{g}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ である。したがって，一般形を標準形になおすため

には，

　　$Ax+By+Cz+D=0$ において，Dを移項して

　　　$Ax+By+Cz=-D$

両辺を $|\vec{g}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ でわると，

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdots\cdots\text{①}$$

ここで，①の右辺は原点Oから平面 α までの距離を示すから正でなければならない。したがって，

　D>0 のとき，右辺<0 となるから，①の両辺に -1 をかけて，

$$\frac{-Ax}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-\frac{Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdots\cdots\text{②}$$

とする。

　D<0 のときは，右辺 >0 だから，①がそのまま，ヘッセの標準形となる。このようにして，Dの符号によって，右辺 >0 となるようにすると，ヘッセの標準形が求められる。ヘッセの標準形を求めれば，その平面への原点からの距離と，勾配ベクトル $\vec{g}$ の方向余弦が求められるのである。

(問 7)

　平面上の直線の方程式 $ax+by+c=0$ において，(性質 1) ～ (性質 3) が成り立つことをたしかめよ。

(問 8)

　次の方程式をヘッセの標準形になおせ。

① $2x+3y+6z-12=0$

② $3x+5y-z+1=0$

③ $x-y+z=5$

④ $x-y+z=0$

⑤ $x-2y=1$

⑥ $2y-3z-2=0$

⑦ $2z-1=0$

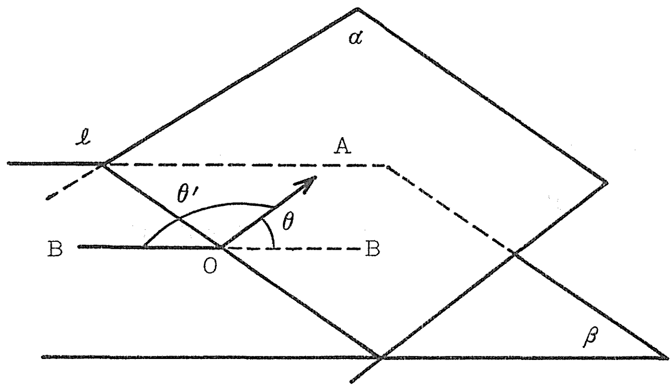
(問 9)

　(問 8) で求めた標準形を用いて各平面の原点からの距離と勾配ベクトル $\vec{g}$ の方向余弦を求めよ。

　また，$\vec{g}$ が原点0に関して，平面と同じ側にあるか，反対側にあるかをしらべよ。

〔2〕 平面の位置関係

1° 二面角（2平面のなす角）



上図のように，２平面α，β が交線 l で交わるとき，２平面 α，β のなす角（二面角）をつぎのようにして求める。

α，β の方程式を

$\alpha : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\beta : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

とする。

$\alpha \cap \beta = l$ とし，l 上の任意の点をＯとし $\overrightarrow{OA} \perp l$ なる $\overrightarrow{OA}$ を α 上，$\overrightarrow{OB} \perp l$ なる $\overrightarrow{OB}$ を β 上にとり，$\angle AOB = \theta$ が２平面α，β のなす角というが，図のように，α，β のなす角は，２通り考えられる。θ と θ' がともに $\angle AOB$ となる。ただ，この２通りの角は

$\theta + \theta' = \pi$

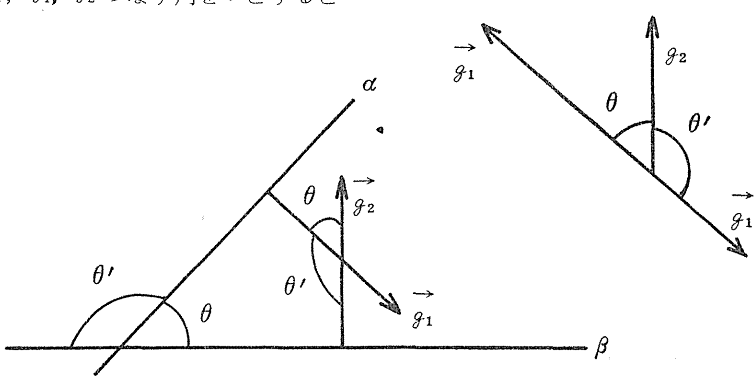
という関係があるので，どちらか一方を求めれば他方は決められる。したがって，どちらか一方を求めることにする。

α，β の勾配ベクトルを

$$\vec{g_1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{g_2} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$ とする。

$\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$ は α，β に直交するから，$\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$ のなす角は θ かまたは θ' になる。

したがって，$\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$ のなす角を θ とすると



$\vec{g_1}\cdot\vec{g_2}=|\vec{g_1}||\vec{g_2}|\cos\theta$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\vec{g_1}\cdot\vec{g_2}}{|\vec{g_1}||\vec{g_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\cdots\cdots\cdots①$$

となる。$\cos\theta>0$ ならθは鋭角，$\cos\theta=0$ なら $\theta=90°$，$\cos\theta<0$ ならばθは鈍角となるが，θの範囲は $0\leqq\theta\leqq\pi$ に限ることに注意しておく。

(問 1)

$\vec{g_1}$，$\vec{g_2}$ のかわりに，単位ベクトルになおして，α，βのなす角を方向余弦を用いてあらわせ。

(問 2)

次の2平面のなす角を求めよ。

① $-x+2y+2z=0$

$x+y+4z=7$

② $2x-y+2z=3$

$2x+2y-z=7$

③ $2x-y+3z=1$

$4x-2y+6z=1$

④ $2x-y+3z=1$

$-x+5y-z=2$

(問 3)

次の平面の方程式を求めよ。

① $2x+3y-z+5=0$ に平行，点 (4, 2, 1) を通る。

② $x+4y-2z=0$ に平行，点 (2, 1, −2) を通る。

2° 位置関係

2平面の位置関係は，平面が空間の点集合であることから次のように分類される。

2平面をα，βとするとき

$$\alpha\cap\beta\begin{cases}=\phi\longrightarrow\alpha\,/\!/\,\beta\ (\text{平行})\\ \neq\phi\longrightarrow\begin{cases}\text{直線}\ l\ (\text{交わる})\\ \alpha=\beta\ (\text{重なる})\end{cases}\end{cases}$$

以上の3通りの位置関係が存在する。これを係数の関係であらわしてみよう。

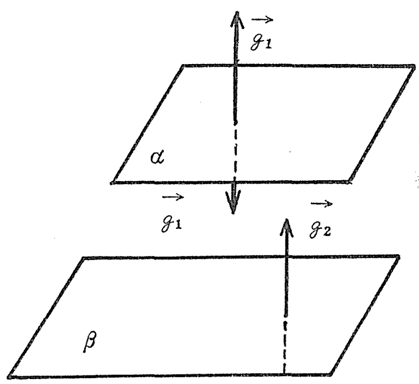
$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

とする。

(i) 平行条件 $\alpha\,/\!/\,\beta$

右図のように，$\alpha\,/\!/\,\beta$ のとき，α，βの勾配ベク



トル $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$ は平行である。$\vec{g_1} \parallel \vec{g_2}$ のとき,

$\vec{g_1}=k\,\vec{g_2}$………①

となる実数 k が存在する。

ゆえに,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad A_1=k\,A_2,\ B_1=k\,B_2,\ C_1=k\,C_2$

これをみたす，実数が存在するから，k を消去すれば,

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}(=k)\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

となる。

ところが，逆に②が成りたつと,

$\alpha: A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=k(A_2 x+B_2 y+C_2 z)+D_1=0$

$\beta: A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$

となり,

$$A_1 x+B_1 y+C_1 z=-\frac{D_1}{k}$$

かつ，$A_2 x+B_2 y+C_2 z=-D_2$

となり，$D_2=\frac{D_1}{k}$ となれば $\alpha=\beta$ となって重なってしまう。したがって，$\alpha \parallel \beta$ であるためには，$D_2 \neq \frac{D_1}{k}$ すなわち,

$$\frac{D_1}{D_2} \neq k\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

でなければならない。このことより,

$\alpha \parallel \beta$ であるために，必要かつ十分な条件は，$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ………（平行条件）である。

さらに，$\alpha=\beta$ であるために，必要かつ十分な条件は,

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ ………（一致条件）

であることも，同時に求められる。

(問 1)

一致条件が導かれる理由をのべよ。

(問 2)

$\alpha \parallel \beta$ であるとき，α, β のなす角 θ は $0°$ かまたは $180°$ である。これを用いて，平行条件を求めてみよ。

（ヒント）

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2+B_{12}+C_{12}}\ \ \sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}$$ より $\cos\theta=\pm1$ となるので

$(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)^2=(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)(A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2)$

を整理せよ。

（問 3）

次の２平面が平行または一致するために a, b, c, d の値を求めよ。

① $2x-by+z+1=0$

$ax+3y+z+2=0$

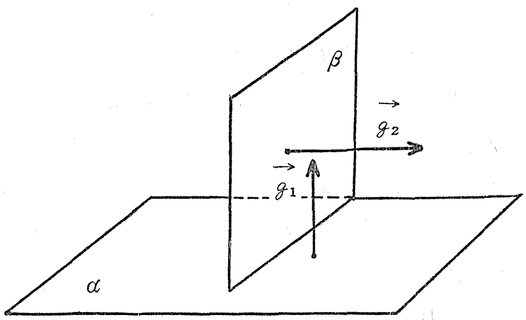
② $x+2y+cz+2d=0$

$-x+by+3z-3=0$

（ii） 直交条件

α と β が直交するとき，α, β にそれぞれ直交する勾配ベクトル $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$ はまた直交する。

すなわち，$\alpha\perp\beta \Longleftrightarrow \vec{g_1}\perp\vec{g_2}$ であるから，２平面 α, β が直交するための必要十分条件は，$\vec{g_1}\perp\vec{g_2}$ である。



$|\vec{g_1}|=\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\neq0$,

$|\vec{g_2}|=\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}\neq0$ であるから，

$$\vec{g_1}\perp\vec{g_2} \Longleftrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{g_1}\cdot\vec{g_2}}{|\vec{g_1}|\,|\vec{g_2}|}=0$$

したがって，

$$g_1\cdot g_2=(A_1,\ B_1,\ C_1)\begin{pmatrix}A_2\\B_2\\C_2\end{pmatrix}=0$$

$\therefore$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ …………①

となる。

（問 4）

$3x-4y+cz=0$

$2x-3y+6z-1=0$

が直交するように，c の値を求めよ。

（問 5）

２点 A(1, －1, 2), B(4, 2, 2) を含み，平面 $3x+y-2z=12$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(問 6)

$2x-y+z+1=0$ と $x+2y-3z-2=0$ に直交し，原点Oを通る平面の方程式を求めよ。

3° 平面の交線

2平面 α, β が

$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

であるとき，$\alpha\cap\beta\fallingdotseq\phi$ のとき，その共有点が1点 $P(x_0, y_0, z_0)$ であるとする。

Pが α 上にあるから，

$$A_1x_0+B_1y_0+C_0z_0+D_1=0$$

よって，

$$A_1(x-x_0)+B_1(y_1-y_0)+C_1(z-z_0)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，点Pは β 上にあるから，

$$A_2(x-x_0)+B(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\alpha\cap\beta=P$ であるということは，点 (x, y, z) が①と②を同時に満足しているということであるから，①，②を連立させると，

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)=-C_1(z-z_0) \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)=-C_2(z-z_0) \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

$x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ について，とくと，

$$x-x_0=\frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0) \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$y-y_0=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z-z_0) \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

よって，③，④より連比をとって，

$$\frac{x-x_0}{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

第1，第2項の分母の行列式を列を入れかえると

$$-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

よって，

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となり，⑤は点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る直線の方程式を示している。

以上のことより，２平面 α, β が点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を共有するならば，α, β は直線⑤を共有しているということが示されたのである。したがって，２平面 α, β の共通部分 $\alpha\cap\beta$ が１点ということはあり得ないということが，代数的に認められたのである。

ところが，⑤の直線の方程式は，全ての分母が同時に０になることがあれば，直線にはならない。

そのときは

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$$

すなわち，$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ が成り立つ。

これは，２平面 α, β が一致していることを示している。

したがって，前節で示した。

$$\alpha\cap\beta\neq\phi \text{ ならば} \begin{cases} \alpha\cap\beta=l & \text{（直線）} \\ \alpha=\beta & \text{（一致）} \end{cases}$$

するか，いずれかに限るということが証明されたのである。

⑤の直線のことを，２平面 α, β の交線といい，⑤を交線の方程式という。

（例）

２平面 $(\alpha)x+2y+3z-13=0$ $(\beta)3x+y+4z-14=0$ の交線の方程式を求めよ。

（解）

交線上の点を求めるために，

$$z=0 \quad \text{とおくと} \quad \begin{cases} x+2y=13 \\ 3x+y=14 \end{cases}$$

これをといて，$x=3$, $y=5$, すなわち２平面 α, β は点 $(3,\ 5,\ 0)$ を共有することがいえる。

したがって，点 $(3,\ 5,\ 0)$ を交線は通るから，求める交線の方程式は，

$$\begin{cases} (x-3)+2(y-5)+3z=0 \\ 3(x-3)+(y-5)+4z=0 \end{cases}$$

をといて，

$$\frac{x-3}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{y-5}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

よって，

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-5}{5}=\frac{z}{-5}$$

$$\therefore \quad x-3=y-5=-z$$

となる。これが，２平面 α, β の交線の方程式である。

また，この直線の方向比は$1:1:-1$ である。

（問 1）

上の例の解答で，$z=0$ とおいて，x，y を求めたとき，x，y が求められないときは，α，β はどんな位置関係にあるか。

また，そのときには，α，β の共有点を求めるには，どのようにすればよいか。

（問 2）

次の2平面の交線の方程式を求めよ。

① $4x-5y+3z=3$

$4x-5y+z=9$

② $x-y+3z=0$

$x-5y-z=0$

③ $2x+y+2z=5$

$x-y-3z=4$

④ $2x+z+5=0$

$x-5y+3z=0$

⑤ $x=1$

$y+z=2$

（問 3）

$3x-2y+1=0$，$4y-3z+2=0$，$z-2x+4=0$ の3平面は，2つづつの交線が平行であることを示せ。

（問 4）

平面の決定条件として，次の条件があるが，只一通りに限るという説明を方程式を用いて行なえ。

① 1直線上にない3点を通る平面は只一つに限る。

② 1直線と1直線外の1点を含む平面は只一つに限る。

〔3〕 直線と平面の位置関係

1° 直線と平面のなす角

$l: \dfrac{x-x_1}{u}=\dfrac{y-{}_1y}{v}=\dfrac{z-z_1}{w}$ …………①

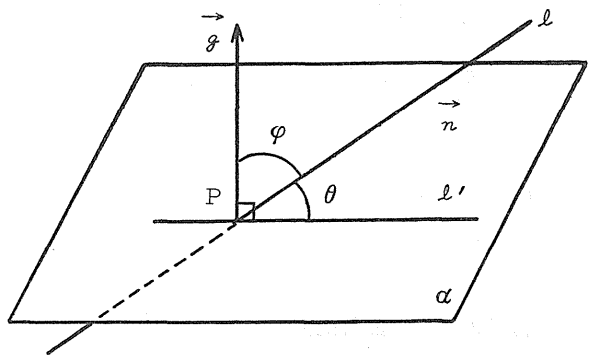
$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ …………②

直線 l，平面 α の方程式を①，②のように定める。このとき，l と α のなす角をつぎのようにして求めることができる。

$l\cap\alpha=P$ とし，下図のように，l の α 上への正射影を l' とすれば，l と l' なす角 θ が直線 l

と平面αのなす角となる。ところで，平面αの勾配ベクトル$\vec{g}$は，αに垂直なベクトルであるから，図のように，$\vec{g}$とlのなす角をφとすれば，

$\varphi+\theta=90°$　となる。



lの方向比は$u:v:w$であるから，

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$ とすれば，

φ の値は

$$\vec{g}\cdot\vec{n}=|\vec{g}|\,|\vec{n}|\cos\varphi$$

より，

$$\cos\varphi=\frac{\vec{g}\cdot\vec{n}}{|\vec{g}|\,|\vec{n}|}=\frac{Au+Bv+Cw}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \ \sqrt{u^2+v^2+w^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

として求められる。

ところが $\varphi=90°-\theta$ であるから，$\cos\varphi=\sin(90°-\theta)=\sin\theta$ となり，直線lと平面αのなす角θは③を用いて，

$$\sin\theta=\frac{Au+Bv+Cw}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \ \sqrt{u^2+v^2+w^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

として求めることができる。

(問 1)

説明において，直線lの方程式が，方向余弦$(\lambda,\ \mu,\ \nu)$で表わされておれば，lとαのなす角θはどのような形で表わされるか。

(問 2)

次の直線lとα平面のなす角を求めよ。

① l；　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-3}=z-3$

　α；　$3x-y-2z=8$

② l；　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{2-z}{3}$

　α；　$2x+y+z=4$

③ l；　$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{2}$

　α；　$2x-4y+5z=0$

④ l；　$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-2}{3}$

α; $3x-9y+\dfrac{9}{2}z=5$

⑤ l; $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{3}$ かつ $z=2$

α; $x-2y=1$

⑥ l は⑤と同様にして,

α; $x-2z=2$

2° 直線と平面の位置関係

直線 l と平面 α のなす角 θ は, 前節によって求められたが, 直線 l と平面 α の位置関係を角 θ を用いてあらわそう。

(i) 平行条件

l; $\dfrac{x-x_1}{u}=\dfrac{x-x_1}{v}=\dfrac{z-z_1}{w}$ …………①

α; $Ax+By+Cz+D=0$ …………②

とする。$l /\!/ \alpha$ のとき, l と α のなす角は

$\theta=0°$ または $180°$

となり, $\sin\theta=0$ である。

したがって,

$l /\!/ \alpha$ であるための必要な条件は,

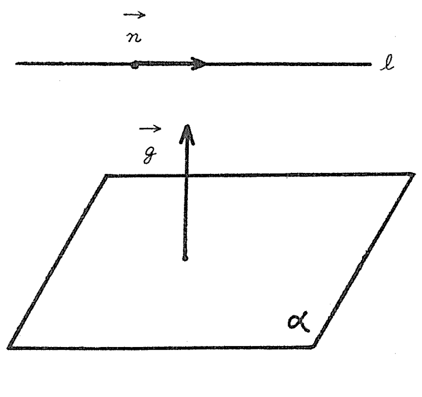
$\sin\theta=0$ すなわち

$Au+Bv+Cw=0$ …………③

である。

(問 1)

$l /\!/ \alpha$ ということは, 右図のような状態であるから平面 α の勾配ベクトル $\vec{g}$ と直線 $\vec{l}$ の方向ベクトル $\vec{n}$ を用いて, 平行条件をあらわせ。



③の条件は $l /\!/ \alpha$ のための十分条件になり得ない。それは, $l=\alpha$ の場合も③は成り立つ。したがって, 平行条件は

$l /\!/ \alpha \rightleftarrows Au+Bv+Cw=0$ かつ,

$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

$l /\!/ \alpha \rightleftarrows Au+Bv+Cw=0$ かつ,

$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

ただし $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は l 上の任意の点。

（問 2）

つぎの直線 l と平面 α とが平行または含まれるためには□の中にどんな数を入れればよいか。

① l； $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{\square}=\dfrac{z-2}{1}$

α； $x-2y+z=5$

② l； $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{\square}$

α； $x+\square y+z=1$

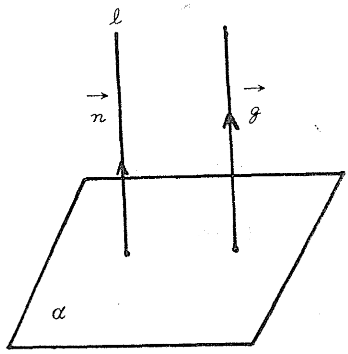
（ii） 直交条件

直線 l と平面 α が直交するときは右図のようになり方向ベクトル

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

と勾配ベクトル

$$\vec{g}=\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$ が平行となる。したがって，



$\vec{g}=k\vec{n}$ となる実数 k が存在する。

成分で表わせば，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad l\perp\alpha \Longleftrightarrow \frac{A}{\lambda}=\frac{B}{\mu}=\frac{C}{\nu}\ (=k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

④が直線 l と平面 α の直交条件という。

ただし，分母$=0$ のときは分子$=0$ と約束をする。

（問 3）

l と α の直交条件を l と α のなす角 θ を用いて④の条件を導け。

（問 4）

次の直線 l と平面 α が直交するように□をうめよ。

① $\dfrac{x-1}{\square}=\dfrac{y=2}{2}=\dfrac{z}{\square}$

$x-3y+2z=1$

② $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{\square}$ かつ $z=1$

$x-3y+\square z=3$

(問 5)

$x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ を含み，点（3, 4, 0）を通る平面の方程式を求めよ。

(問 6)

直線　$x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ を含み，平面 $2x+3y-z=4$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(問 7)

平行な２直線$\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{2}-\dfrac{x+1}{2}=y-1=\dfrac{z}{2}$ を含む平面の方程式を求めよ。

(問 8)

平行な２直線を含む平面は只一つ存在することを証明せよ。

〔4〕 正領域・負領域

1° 平面上の領域

２次元空間（平面）の直線の方程式は

$ax+by+c=0$ …………(1)

であらわされる。この直線によって，平面は２つの部分に分けられる。

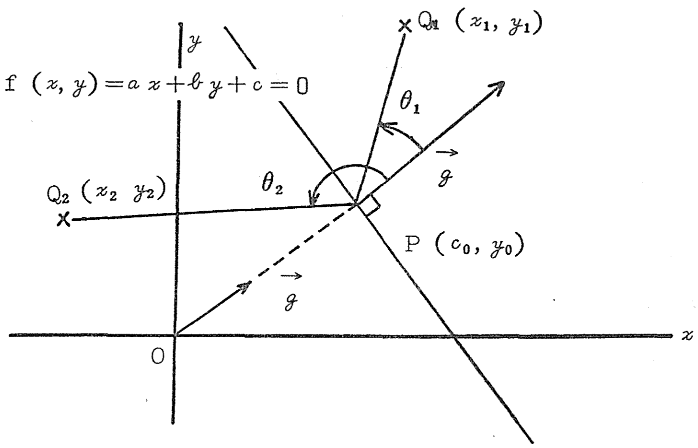
ここでは，平面上の点が直線(1)によって分けられた２つの領域が数量的にどのようにあらわされるかをしらべるのである。

そこで，

$f(x,\ y)=ax+by+c$ …………(2)

とおくと，直線(1)上の点の座標を代入すると $f(x,\ y)=0$ となる。直線(1)以外の点に関しては，$f(x,\ y)\fallingdotseq 0$ となるので，その符号をきめようというのである。

直線 $ax+by+c=0$ の勾配ベクトルを $\vec{g}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。$\vec{g}$ の始点を直線(1)上に図のように平行移動しその点をＰとすると，



$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PO_1}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix}=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)$

$=ax_1+by_1-ax_0-by_0=ax_1+by_1+c=f(x_1,\ y_1)$

ところが，$\vec{g}$ と $\overrightarrow{PQ_1}$ のなす角 θ_1 は鋭角だから

$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_1}=|\vec{g}|\cdot|\overrightarrow{PQ_1}|\cos\theta_1>0$

したがって，$\vec{g}$ と $\overrightarrow{PQ_1}$ が直線 $ax+by+c=0$ に関して同じ側にあれば

$f(x_1,\ y_1)=ax_1+by_1+c>0$ …………(3)

となる。

つぎに，点 Q_2 と $\vec{g}$ が直線(1)に関して，図のように反対側にあれば，$\vec{g}$ と $\overrightarrow{PQ_2}$ のなす角 Q_2 は鈍角になるから，

$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=|\vec{g}|\cdot|\overrightarrow{PQ_2}|\cos\theta_2<0$

かつ，

$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot(x_2-x_0,\ y_2-y_0)=a(x_2-x_0)+b(y_2-y_0)=ax_2+by_2-ax_0-by_0$

$=ax_2+by_2+c=f(x_2,\ y_2)$

となり，$\vec{g}$ と $\overrightarrow{PQ_2}$ の方向が直線 $ax+by+c=0$ に関して反対側にあれば，

$f(x_2,\ y_2)=ax_2+by_2+c<0$ …………(4)

となる。

この結果より平面上のすべての点は，$f(x,\ y)=ax+by+c$ の値を正，0，負のいづれかの値をとることがいえた。

これを用いて，平面をつぎのような領域に分ける。

直線 $f(x,\ y)=ax+by+c=0$ によって，分けられる平面の一つの領域の点 $Q_1(x_1,\ y_1)$ について，$f(x_1,\ y_1)>0$ ならば，点 Q_1 の属する領域を直線 $f(x,\ y)=0$ の正領域といい反対側の領域の点 $Q_2(x_2,\ y_2)$ に対しては，$f(x_2,\ y_2)<0$ となって，この領域を直線 $f(x,\ y)=0$ の負領域という。

(例)　直線 $-x+2y+3=0$ に関して，次の点はどの領域に属しているか。

A(1, 3)　B(2, −1)　C(, 1)

(解)　$f(x,\ y)=-x+2y+3$ とおくと，A(1, 3) については，

$f(1,\ 3)=-1+63=8>0$

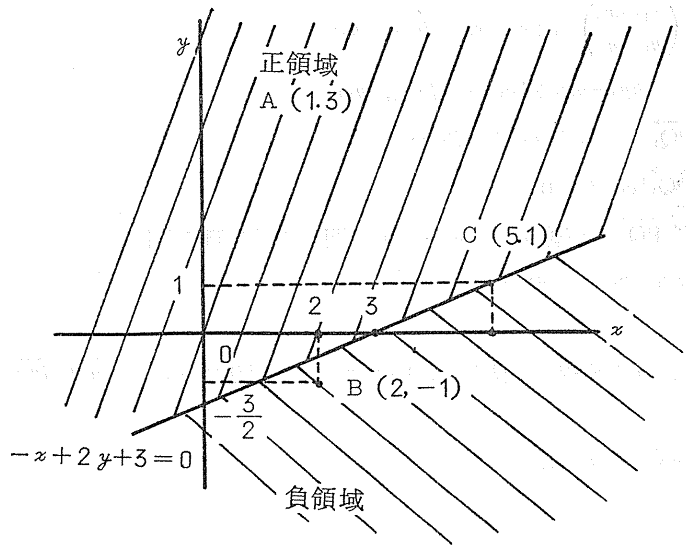
B(2, 1) については，

$f(2,\ -1)=-2-2+3=-1<0$

C(5, 1) については，

$f(5,\ 1)=-5+2+3=0$

となり，点 A，B，C は次図のようになり，直線 $-x+2y+3=0$ の正領域，負領域は斜線の部分である。



（問 1）

直線 $x-2y-3=0$ に関して，次の点はどの領域に属しているか。例と比較して考えよ。

A(1, 3)　B(2, −1)　C(5, 1)

（問）と（例）とを比較してわかることは正領域，負領域は固定したものではなくて，直線の方程式によって，異なるものであることがわかったであろう。

（問 2）

次の各点は下の直線のどの領域にあるかを示せ。

A(2, 1)　B(−3, 2)　C(0, 0)　D(0, 2)　E(−2, 0)

(1)　$x-y+1=0$

(2)　$-2x+y-3=0$

(3)　$-x+5y+4=0$

（問 3）　次の各直線の正領域，負領域を図示せよ。

(1)　$2x+y+1=0$

(2)　$x-2y-4=0$

(3)　$2x-y=0$

（問 4）

次の不等式を満足する点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

(1)　$x-3y-9\leqq 0$

(2)　$2x+3y-6>0$

(3)　$y>2x-1$

(4)　$x\geqq 2y-1$

(5)　$y<3x$

2° 空間の領域

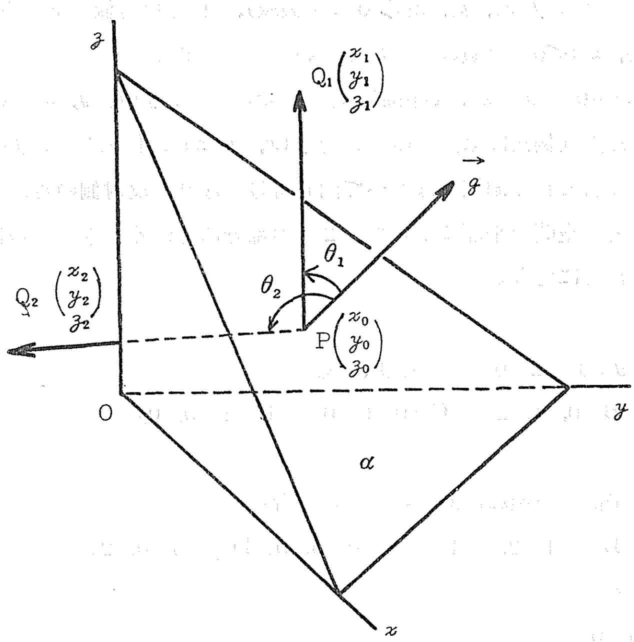
3次元空間の平面 α の方程式は

$Ax+By+Cz+D=0$ …………(1)

であらわされる。この平面 α によって，空間は2つの部分に分けられる。この領域を 1° と同様に不等式を用いて表わしてみよう。

α の勾配ベクトル $\vec{g}=\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ とする。

α に関して，$\vec{g}$ と同じ側にある点を $Q_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，反対側にある点を $Q_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，



$f(x,\ y,\ z)=Ax+By+Cz+D$ とおくと

$$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_1}=\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \\ z_1-z_0 \end{pmatrix}\cdot(A,\ B,\ C)$$

$$=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)$$

$$=Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_0+By_0)+Cz_0$$

$$=Ax_1+By_1+Cz_1+D$$

$$=f(x_1,\ y_1,\ z_1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。

ここで，$\vec{g}$ と $\overrightarrow{PQ}$ のなす角 θ_1 は鋭角であるから，

$$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_1}=|\overrightarrow{PQ_1}|\cdot|\vec{g}|\cos\theta_1>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2), (3)より

$$f(x_1,\ y_1,\ z_1)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となり，点 θ_1 は平面 α の正領域にあるという。

つぎに，点 θ_2 に関しても同様に考えると，$\vec{g}\cdot\overrightarrow{PQ_2}>0$ となり，

$$f(x_2,\ y_2,\ z_2)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

がみちびかれる。このことより，点 θ_2 は平面 α の負領域にあるという。

このようにして，空間内のすべての点は，1つの平面 α によって，α 上にあるか，α に関して，正領域か負領域にあるかの，いづれかに分類されることがわかる。

すなわち，$f(x,\ y,\ z)=Ax+By+Cz+D$ とおくと，勾配ベクトル $\vec{g}$ と同じ側にある点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ については $f(x_1,\ y_1,\ z_1)>0$（正領域），$\vec{g}$ と反対側にある点 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ については，$f(x_2,\ y_2,\ z_2)<0$（負領域）となるということである。

平面 $f(x,\ y,\ z)=0$ の正領域，負領域を定めるためには，$f(x,\ y,\ z)=0$ を図示し，どちらか一方にある特殊な点（例えば原点）の座標を $f(x,\ y,\ z)$ に代入して，$f(x,\ y,\ z)$ の符号をきめれば，その点の含まれる領域ではすべて同じ符号となり，反対側の点は，符号も逆になる。このことを用いると，空間を平面によって，2つの部分に分けるとき，その領域が正か負かを決定することがかんたんにできる。

（問 1）

次の点は，$2x-y+3z-2=0$ のどの領域にあるか。

A (1, 2, 3)　B (0, 1, 2)　C (0, 0, 0)　D (1, 0, 0)

（問 2）

次の各点が下の平面の正領域にあるのはどの場合か，

A (0, 1, 2)　B (−1, 2, −1)　C (0, 0, 0)　D (−3, 0, 2)

(1)　$-x+y-3z+2=0$

(2)　$3x+2y-z-4=0$

(3)　$4x-3y+z=0$

（問 3）

次の平面の正領域を図示せよ。

(1)　$2x-4y-3z-1=0$

(2)　$x+3y-2z-2=0$

（問 4）

次の不等式の領域を図示せよ。

(1)　$2x-y+z-4>0$

(2)　$y\leqq 2x-3z$