

線型代数の導入についての  
考察と実験テキストその1

報告者 長野 東

# 目 次

§ 1. はじめに .....	1
§ 2. プランの目標 .....	3
§ 3. 指導要領との比較 .....	10

## §1. はじめに

### (1) これまでの流れ

線型代数に関する教材の研究の歴史は相当古い。それは、線型代数学の歴史が極めて古いことによる。すなわち、線型代数学の典型的な問題が、一次方程式  $ax=b$  の解法・ $f(x)=ax$  の関数の値を求める問題などであって、初等教育の段階で古くから取り扱われていたからである。

しかし、これが現代化の中で大きく認められるようになったのは、線型代数学が古くて新しい学問だからである。

新しい例としては、現在の指導要領にベクトルがとり入れられ、ベクトルの導入についてはすでに、非常に多数の発表が各地でなされている。

ベクトルの導入についての問題点は矢線ベクトルか数ベクトルか、どちらか一方がよいという結論は出ていない。

ベクトルの導入と同じ時期に代数的構造を高校数学にとり入れるための実験が多く行われ、その構造も  $\alpha$  系、群、環、体と多様にわたったがその結果、今度の指導要領の改訂で中学校では「集合と演算」という教材の中で、群の構造についてとり扱うこととなった。

これは、現場の実験の結果がとり入れられた一例である。

群の概念がとり入れられ、ベクトルの演算の性質が教科書で示されてくると、ベクトル空間（線型空間）の概念はすでにとりあつかっていることになる。

44年度日数教熊本大会での発表あたりからとくに注目されることは、行列の指導の実践報告や指導プランも多数発表されるようになった。

今回の指導要領の改訂の結果、数ⅡBで行列をとりあつかうことが示された。

このように、線型代数の諸概念が高校数学の対象として、とり入れられてきた過程は、ここ10数年間の活潑な現場の実践活動の積み重ねが、その原動力になったものである。

私の研究もその流れの中のささやかな一つの水泡の如きものであった。私の研究の発端は現指導要領改訂時にある。教材の内容が非常に増加して、教材の消化不良をおこす生徒が相当出ることが予想された。当時都立高校にいた私は、大学入試のために一応教科書の内容すべてに触れなければ不安を生徒にあたえるし、すべての内容に触れるならば時間数不足で消化不良に必ずなる。

この問題を解決するためには、教授法の改善、工夫などですむものではなくて、教材内容の検討、さらにその教材の数学的、社会的意義を吟味して、より体系的、実用的な学習内容の整備をする必要があると考えた。

丁度、当時、代数学の発展とそれにふれるいくつかの図書、その中でも、「現代数学概説」（弥永昌吉、小平邦彦）は何か数学の見方で新しい立場を示されていることを感じて、この方向に高校数学の体系化も考えられるのではないかと考えられるようになり、教材の代数

化の方向で整理をはじめた。

## (2) 背景

数学教育の現代化が叫ばれて久しくなる。このような傾向は世界的な背景があり、その中で線型代数学がどのように位置づけられているかを考えてみたい。

### 1° 社会的背景

数学教育の現代化はアメリカのスプートニクショック以来といわれているが、それは近因であろう、資本主義国、社会主義国の区別なく、数学教育の改革には熱心である。

それは、市民の欲望、社会の高度化、複雑化による需要の多様化、多量化に応ずる生産力の整備が緊急の状態になってきていることであろう。

そのために、社会が要求する人間像は、多種、多量の物・量の処理・計画の能力と、更に、今迄とは異なった新しいアイデアを生み出す能力をもつ人間である。

したがって、固定された概念や、既成の概念にとらわれないで、よりよい考え方を探しあてる能力が必要とされるのである。そのためには、単なるメンタルテストや、クイズばりの思考転換法などで得られるものではなくて、もっと、基本的、本質的な思考が要求されている。

このような人間形成に必要なものは決して数学だけではなく、各方面からの指導、教育が必要と思われるが、思考の発展過程とその体系化が最も純粋に見られるものは数学ではないかと思われる。

その意味で現代数学における代数化の傾向その中でも高校でとりあげやすい線型代数化の傾向を体験させることは、高校の段階で必要なことと思われる。

このようにかくと、数学は思考のためにのみあるように考えられるが、社会が要求している多種・多量の数量的処理をするために、生まれた計算機、コンピューターを活用するとき、必要になることは、線型代数学の基礎概念である。行列とかベクトルが多次元の量の処理のため有効な力を発揮することは余りにも衆知のことである。

### 2° 数学史的背景

線型代数という用語はよく用いられ、社会科学などでも多用されているが、いざ説明すると断片的な答えしか出せないことが多い。

そのようなこともあって、線型代数の歴史を概観することにした。これは主として、ブルバキの数学史による。

前出したように、線型代数学の典型的な問題が一次方程式  $ax=b$ 、一次関数  $f(x)=ax$  の形のものであるが、この形の問題を考えるのに、<線型的な考察>が必要になってくる。

線型代数が最も基本的な演算の系に含まれているので、古くから、実地の計算家の要求によって、発展していった。

たとえば、エジプトのリンド・パピルス、アリアバタやアラビヤものやピサのレオナルド、中世、ルネッサンス期の無数の計算書において、線型代数の利用が多く見られる。

バビロニアには、いまの初等代数に似た諸方法があり、手際の良いやり方で、連立一次方程式が解かれている。

これは、ユークリッドの「原論」に示されている、線型的性格の抽象的理論の展開された二つの面の一つである量の理論の流れである。

この流れは18世紀まで、連立一次方程式に関して、未知数が数個の場合は移項と同類項のまとめにより、未知数を消去して、一個だけにすることを知っていればよかったのであるが、19世紀になって、行列式の導入によって具体的な解の公式を〈一般の場合〉に与えられるようになった。

このような計算技術の流れに対して、より線型代数の理念的な方面での流れがある。

それは、アポロニウスの研究の影響をうけて、フェルマ、デカルトは解析幾何学の原理を会得し、平面曲線をその次数によって分類する基本的な原理をたてた。この原理から、軌跡に関する諸結果を導き出し、未知数の個数と図形との関係について整理をした。

これは、次元の原則を代数学と代数幾何学で立て、代数と幾何とのある融合を、現代的な考え方に完全に合致する融合を指している。

この考え方が以後18世紀に、クレロー、オイラー、クラメル、ラグランジュ等により、座標変換の公式の線型的性格、(オイラー)アフィン変換( $x' = ax, y' = by$ )を導入し平面曲線、空間曲線の分類を次数に従って、行っている。

三次元解析幾何学の典型的に線型および、複線型な問題(ラグランジュ)

与えられたいくつかの点を通る平面曲線の研究から起こる、線型の問題を行列式の問題で整理(クラメル、ベズー)

発展させた。この概念の本質的性質は、コーシー、ヤコビによって、決定的になる。

ここに、線型代数学の現代的な側面が認められる。

この間に、計算技術面では一次方程式が軽視されている間に、微分方程式が入れ替わり登場して来た。とくに、微分方程式の中から線型方程式が早くから認められ、非斉次方程式の一般解が、一つの特解と対応する斉次方程式の一般解との、和になる(ダランベール)

階数 $n$ の斉次線型の一般解が特殊解 $n$ 個の線型結合だと述べるために必要な線型独立の概念を明確にした。(コーシー)

線型微分方程式  $L(y)=0$  の随伴方程式

$L^*(y)=0$  を導入し

$$\int zL(y)dx = \int L^*(z)ydx$$

によって、双対性の典型例をあげた。(ラグランジュ)

さらに、ユークリッドの抽象理論のもう一つの側面である整数論において、ラグランジュが線型置換によって、 $F(x, y)$  ( $x, y$  は整数値全体をとる)の値の全体は $x$ と $y$ に、(行列式 $I$ の線型変換)変化しないことを発見した。

この考察をもとにして、形式による数の表現の理論と、形式の簡約のそれとの基礎をおいた。

これを、さらに発展させて、形式の同値、その類の概念をはっきりさせ、線型置換、転置あるいは随伴の概念を導入した（ガウス）

近年では二次形式の数論的研究と代数的研究とは、2, 3 変数の中には  $n$  変数として、進められ、それに密接に関係する双線型形式の研究、また近年ではこうした概念の無限変数への一般化が、線型代数の進歩の源泉となっている。

さらに、ガウスが有限可換群の理論で構造の同型を論じたことは、注目に値するものでヤコビそしてクロネッカーの諸定理に達する。

今まで、ふれなかったものに、射影幾何学があるが、これは、射影変換は射影あるいは＜重心＞座標での線型変換、射影幾何学での双対性は線型空間の双対性的一面、円錐曲線二次曲面の射影的理論は二次形式になり、線型代数学と深くむすびついている。

19世紀になって、ガウスの虚数の幾何表示に暗に含まれている考え方より、カルノがベクトルの加法を作り、ケイリー、グラスマン、ハミルトンにいたって、＜ベクトル算＞を完成し、シルベスターが行列を導入し、階数をはっきりと定義した。

以後、急速な進歩をとげて、現代にいたるが、現代においては、公理的方法と構造の概念とが、それまでもつれていた諸概念を分離し、漠然としていたものを定式化し、特殊な条件の下で成り立つことしか知られていなかった諸定理を、本来の一般性のもとで証明することを可能にした。

このようにして、線型代数学はその計算技術の進歩と幾何との融合によって、実用性と抽象性を具備する数学として発展してきた。

以上のように、社会的背景と数学史的背景の示すところにより、線型代数学を高校数学にとり入れることは、必要であるとともに、可能である条件がととのってきた。

その理由は数学の進歩によって、公理的体系的に線型代数学が整理されたことによる。

さらに、多次元の量の処理をする実際的必要性のためにも、容易に利用されるよう、整理することが要求され、教材として扱うために必要な多くのデータが身近かに発見できるような社会になってきたことである。

これに、一層の拍車をかけるものとして、計算機の簡易化によって、高校においても、数量の処理が出来るようになったので、線型代数を高校へ導入できる素地は整えられたと思う。

## §2. プランと目標

線型代数学を初等教育ここでは、高校数学にとり入れるためには、ただ、大学で行う線型代数学の内容をうすめて羅列すればよいというものではない。

大学で行う数学と高校での数学にはおのづから取り扱い方にちがいがあがる。かといって、

数学に二種類あるわけではなくて、もっぱら教育的配慮によるものと思う。

したがって、線型代数をとり入れるにしても、大学の線型代数学の水割りを飲ませるのではなくて、濃縮されたエキスを味わわせる必要があると思う。

そのために、必要なことは次の2点である。

1° 目標を具体的にどこにおくか。

2° 展開の際にどのような立場をとるか。

上の1°, 2°は元来、切り離して考えられるべきものではない。相互にからみ合って、判然と区別できないものではあるが、その中で「何を」と「如何にして」という両輪がともに教師の主体性の中で認識されないままに、客観情勢に従うならば、そこには、自主的な教育はあり得ない。

そこで、以下のように、目標と方法を考えたのである。

1° 目 標

一般的目标

1. 数学を体系的に組み立てていく過程を体験させ、その過程の中で、論理的発見と体系的理解をする。

高校数学と大学数学のちがいは、高校では構成的であるに対して、大学では、公理的な立場をとる。

近年高校のみならず、小、中学校においても、公理主義的な立場を進めるむきもあるが、現状では高校までの段階では事実の経験と推論によって、帰納的に、体系を構成していく方が適切と思われる。

とくに、数学の体系が既成のものをおしつけて、その型にあてはめるといふものならば、学習者の主体は失われるものになるから、体系を自分で発見していくことを体験することが何より必要なことと思われる。

2. 数学的な用語・記号の意義を数学的な思考、推論を進めるために必要であることを理解し、用語・記号を用いて諸性質を簡潔に表現する技能と、読解する能力を養う。

数学は記号の学問であるといわれる位い、記号は重要で、記号がなくては、今日の数学はあり得なかったと思う。それだけに記号の適切な使い方が必要で、定義を間違えると無用の長物となるばかりか、学習者にとっては苦痛や負担の過重となるばかりである。

記号・用語の有用性を体験するために適切な量の記号と発展性のある教材を選ぶことが、数学を記憶の学問と感ずるか興味をもって、論理的な思考にとりくませるかの岐路となる。

3. 多くの事象の中から、基本的な性質を抽象し、適切な見通しを立て、論理的に思考する態度を養うとともに、事物の本質を見抜く能力を伸ばす。

現実の事象は極めて複雑多岐にわたるものではあるが、その本質を抽象して比較す

ると極めて、類似のものがある。

歴史学、社会学等においても、よく用いられる時代の比較、文化の比較等の手法は実は現代数学においては、写像、構造の概念を用いて、典型的な形で表わされている。

ただし、この比較類推の方法はその抽象の仕方、比較の仕方において科学的な思考方法を失うと、戦前の歴史学のような「神風思想」も生みかねない、危険性をはらんでいる。

現代における正しい数学教育は二度とこのような誤まりをおかさないためにも目標3が正しく指導されなければならないと考える。

### 線型代数指導上の目標

一般目標を具体化するには、線型代数は極めて有効な教材である。以下これを取りあげた理由として考えられることが実は目標ともなるので、それについて述べる。

1. 線型代数の具体的イメージとして、解析幾何学を学び、ベクトルという概念によって、統一的に図形の性質が整理され次元が変わっても不変な性質を発見する能力を養う。

ベクトルの導入に数ベクトルか矢線ベクトルかという論議はもう古いが、ベクトルを解析幾何に用いることによって、次元に関係なく統一的な表現・思考ができることが、ベクトル利用の利点であるそのためには、矢線ベクトル⇔数ベクトルの双方を常に用いることができるような能力を養うべきであろう。

さらに、解析幾何を取りあげるために必要なことは次の目標である。

2. 座標、および図形を写像の概念を用いて統一的にとらえ、より一般的な表現に写像を用いて表わすことの有効さを理解する。

集合と写像の概念は現代数学における最も強力な武器である。これを如何に自由に駆使できるかによって、現代数学の理解と発展に役立てることができるかのバロメーターともなる。

- (ア) 点の位置を表わすための座標を実数  $R$  の直積集合と点  $P$  の位置との対応

$R^n$  の元  $\longleftrightarrow$  点  $P$  の位置

によって、1対1の対応がつけられることを集合の直積とその射影という概念を用いて考えることになれ、表わすことができるようにする。

- (イ) 図形を表わすためには写像と逆写像の概念を導入し、写像ではパラメーター表示、逆写像では陰関数表示の意味と今迄の陽関数表示との比較によって、一般性のある表示であることを理解させる。そして、これの利用をする能力を伸ばすようにする。

3. 集合・写像・ベクトル・行列の用語・記号の意義を理解し、論理的思考、幾何的図形を理解し表現するのに、有効であることを知り、表現する能力を養う。

思考の集約化、推論の発展をするために用語・記号が必要であることを理解させるためには、線型代数は最も適当なモデルである。

たとえば、2次元の直線の表現が3次元の平面の表現に拡張され、更に類推によっ



て、 $n$ 次元の超平面というものが考えられることに、それ程の抵抗はないであろう。

このような発展的な物の見方を養うことが、数学教育の重要な目標であると思うので、重点的に指導したい。

4. 線型空間の構造を理解し、線型写像の概念が図形の性質をとらえるために、必要な概念であることを理解するとともにそれを使用する能力を養う。

構造の概念は計算技術の進歩・発展の結果生まれた概念であるが、構造の指導の目標は2点ある。

- (ア) 一つの集合について、元の結合関係を定義することによって、構造をもつことを発見する能力を養う。

これは、数の拡張において、すでに中学校において行なわれている。このような考え方を常に行うことができるような態度を養うことが必要である。

- (イ) いくつかの集合の構造を比較し、写像のつけ方によって演算の結果も対応するという事実を発見することができる能力を養う。

数学では同型という概念であるが、このような言葉を指導するよりも、その内容を把握することが必要である。線型写像の特徴を理解する目的もここにある。

以上のような目標にしたがって、具体的な教材の展開のための指導方法の原理を説明する。

## 2° 展開方法について

数学の学習指導法について、興味ある考え方をF・クラインが1908年「高い立場からみた初等数学」の中で述べてある。私もこの考え方に指導されたのでそその一文の要点を抜粋して参考に供したい。

それは、「数学の近代的発展と一般的構造について」という節の中の一文である。その中で、F・クラインは数学の発展史の系統を完全に理解するためには、三つの系統を考える必要があるとしている、その系統とは、

### 系 統 A (分析的方法)

科学の分科主義的の把握にもとづいているもので、全体を互いに分離されたいくつかの分野に分割し、最小限の手段を用い、隣接の分野から借りることはできるだけ避けようとする方法で、その理想は各専門分野を結晶した論理的に閉じた体系につくり上げることである。

### 系 統 B (総合的方法)

個々の専門分野の有機的結合と、これら専門分野の相互に及ぼしあう刺戟に重点をおく。だからそういう人は、数個の分野をひとつの観点から理解させてくれるような方法を好む。その理想は、数学的科学的全体をひとつの大きく連関した全体として、理解することである。

### 系 統 C (算法的発展方法)

(これは次のような例で書かれている。)

アラビヤ数学者の名前からおこった算法 (Algorithmus) ということばと関係がある。順序づけられた形式的な計算はすべて根本的には算法的であり、とくに文字計算は1種の算法である。

算法的方法がどれほど個々の数学者の見解や見とおしから、独立もしくはそれと反対してある程度自己促進的で公式に内在する力を発揮してきたかは、これまでくり返し強調してきた。のちに(注)この本ではこのあと微積分が説明されている)みるように微分積分学の初期には、その正しさの証明ができる前に算法がしばしば新しい概念や算法の発明へ導いた。さらに高度の発展段階においてさえ、これらの算法的な契機は今後も有益であると考えられ、また、実際にこれまでも有益であった。したがって、これを数学的発展の基盤とよんでもよいだろう。

以上のように、系統AからCまでの説明があって、更に、それを数学史的な裏付けをしていて、最後に結論として、次のようなことが述べられてある。

「前世紀における数学史では、われわれの主な研究法はどちらも重要であったのであり、そのおのおのが、またときには2つがつぎつぎに、この科学の重要な進歩をもたらしたのであると、この2つの研究法がどちらも無視されない場合にのみ数学はすべての方向に万遍なく発展しうる。……………(略)……………」

高等学校の教育では、しかし、すでに示したように、永い間系統Aに一方的に支配されてきた。だから数学教授法の改革をめざすいかなる運動も、Bの方向にもっと力を注ぐ必要がある。これに関連してとくに私(F・クライン)が考えるのは発生的教授法を普及させることであり、空間的直観にもっと重点をおくことであり、そういうわけで、とくに空間的直観と数的直観の融合のもとに関数概念に優位を与えることである。」

このような表現で約60年前F・クラインが高校数学について述べてあることは、残念乍ら現在でも十分には生かされていない。

そのために、私は線型代数を導入する必要性を感じその指導方法をF・クラインのいう系統B、系統Cをなるべく生かす方法をとろうと思う。以下具体的にその展開方法を述べる。

#### (1) 系統Bを生かす方法

集合において、直積集合を定義し、写像において、射影、写像、逆写像の概念を与えて、一次元空間のベクトルの構造を数直線から類推して、ベクトル空間を定義し、それから二次元、三次元へと発見的に展開する。

パラメーター表示を用いれば点、直線、平面の間に共通の表現ができること、方向余弦によって、直線の表わし方が統一的になることなどはその例となる。

直線の位置関係、連立一次方程式の解の問題などが行列式を用いるとまとめて考えられ、代数と幾何を総合的に見なおすことができる。

ベクトル、行列、行列式はすべて三次までとする。その計算についても主として二次の場

合について行うことを中心として考える。三次は発展的に考える。

行列を用いることによって、変換が統一的にとらえられ、写像の具体的なイメージ作りにも役に立つ。

以上のように、系統Bを生かすためには次のような点に注意した。

(ア) 基礎に用いる概念はなるべく少なくした。すなわち、

集合、写像、ベクトル、内積、行列式。

(イ) 表現は一般性のある方法をとった。直線、平面、円、球などの表わし方はベクトル方程式で表わすことができるようにした。

(ウ) 新しい記号・用語は既知のものから導入できるようにした。

(例) 数直線より一次元ベクトル空間、直線の傾きよりベクトルの内積、面積より行列式へ、というように展開した。

## (2) 系統Cを生かす方法

線型代数という名の如く本来演算を中心とする代数であるから、到る処演算を用いる。ただ、演算のための演算をするようなことなく、演算が思考を進め、簡約化するように考えた。

例としては、

(ア) ベクトルを用いて、幾何図形の性質を証明したり、導いたりする。

(イ) 空間図形については、図示できにくくても、ベクトルを用いて容易に証明できることを体験する。

(ウ) 成分表示によって、座標と対応を作り、図形の方程式を作る。

(エ) 内積を用いて、幾何的量を表現し、量に関する問題を計算で解くようにできる。

(オ) 表現の類似性を発見する。

直線の位置関係

平面の位置関係

円と球

接線と接平面

連立一次方程式の解の問題

行列による変換の表現

以上のような点について、形式的表現とその内容の関係を理解して一般的な場合への発展と具体的な問題の解決ができるようにする。

以上にのべたような立場(目標)をもって線型代数を高校数学に導入してみようと思う。この研究は二年連続なので、私は現在高校一年生の授業を担当している関係上、現行教科書をもつ生徒を頭に入れて、2年間での実験授業をしてみたい。現在はその第一年度の一学期における経過報告を以下に述べることにする。来年度において、最後まで完成する予定である。

### § 3. 指導要領との比較

現在は過渡的な段階であり、新指導要領による教科書も近く出されようとしている。

したがって、私のプランと新・旧指導要領との比較をすることによって、私のねらいも理解していただけたらと思う。更に諸外国のプランの検討も必要があるが、紙面の都合もあって、今回は省略した。

- (1) まず、現指導要領について、線型代数と関連のありそうな部分を以下に抜粋した。その概要をのべると、

#### 数 I

有向線分の概念の見える教科書もあるが、殆ど座標を用い、ベクトルの考え方は見られない。関数についても陽関数表示が中心になっている。

空間図形が系統Aの考え方によってか、他とあまり関係なく書かれている。

#### 数 II B

ベクトルと、図形と方程式が独立にあつかわれている。

したがって、曲線の表わし方についても極座標、媒介変数による表わし方が独立におかれて、生徒にとっては、余分の学習内容を与えられているような感じを与える。

座標変換についても、座標軸の移動という考え方はわかるが、変換という概念は理解できないのではないか。

教科書によっては、ベクトルの内積をやったあとで、直線、円の方程式を扱っているが、これはあくまで、内積利用の例題にしか過ぎなく、ベクトルがとりあげられた重要な理由を見逃している。

一般的な感じからいえば、この指導要領はF・クラインのいう所の系統Aの流れをくむものであって、それぞれの教材の意義が充実理解されることが大変むづかしいと思われる。

以下に、現指導要領の内容を示そう。

#### 現指導要領の内容

#### 数 学 I

#### (4) 平面図形の式

平面図形、座標の概念および平面図形と式との関係について理解を深める。

##### ア. 点の座標

二点間の距離、線分の内分点・外分点

##### イ. 直線の方程式

平行関係、垂直関係

##### ウ. 円の方程式

##### エ. 不等式と領域

領域は、半平面、円の内部、円の外部など簡単なものとする。

用語と記号

軌 跡

(5) 空間図形

空間における直線、平面などの関係およびそのとらえ方について理解を深めるとともに、空間座標を導入し、空間図形の内容を豊かにする。

ア. 直線、平面などの関係

(ア) 直線・平面の結合関係

(イ) 三垂線の定理

(ウ) 直線、平面および円の投影図

イ. 空間座標

点の座標、二点間の距離（球の方程式にふれる）座標平面に平行な平面

用語と記号

二面角、正射影、跡（直線、平面に関するもの）、だ円（長円）

(6) 数学と論証

体系的に論理を進めていく方法を、図形や数・式を通して理解させる。

ア. 公理、定理、証明

イ. 命題とその逆

ウ. 証明の方法

直接証明法、間接証明法

用語と記号

命題、公理、逆、対偶、背理法

数 学 II B

(3) 三角関数とベクトル

ウ. ベクトル

(ア) ベクトルの意味

(イ) 加法、減法、実数との乗法、内積

用語と記号

ベクトル、成分、内積

(4) 図形と座標

図形の解析的な研究方法を用いる能力を伸ばすとともに、座標変換の考え、極座標などを導入し、座標の概念の理解を深める。

ア. 二次曲線

だ円、双曲線、放物線の標準形の方程式

イ. 座標軸の平行移動・回転

座標軸の回転については、曲線  $xy=k$  を双曲線の標準形に直すことなど簡単なものとする。

#### ウ. 曲線の表わし方

(ア) 媒介変数による表わし方

(イ) 極座標による表わし方

曲線は、 $r=k\theta$  など簡単なものとする。

#### 用語と記号

焦点、準線（放物線に関するもの）長軸、短軸、直角双曲線、漸近線、二次曲線、媒介変数、極座標、直交座標。

#### (2) 新指導要領について

批判は前に出しておいたが、このような指導要領に対して、昭和 48 年 4 月 1 日より実施される指導要領を比較してみた。勿論、線型代数に関する部分を抜粋したものである。

これは、現指導要領の批判にこたえて、登場したもので、目標について比較すれば、現指導要領では、第一款、目標において 6. 数学が生活に役立つことや、数学と科学・技術その他との関係などを知らせ、数学を積極的に活用する態度を養う。とあるのがなくなり 1～5 の目標は殆ど同じで、表現も全く同じものがある。その代り、新指導要領では前文ができて、その前文には、

「事象を数学的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成し、また、社会において数学の果たす役割について認識させる」

と書かれている。これが中心目標としてとらえられるべきなのであろうか。

統合的、発展的という面からであろう、内容が 4 つのパターンに分けられて、

A. 代数・幾何

B. 解析

C. 確率

D. 集合・論理

となっている。

このパターンを作った点は現指導要領に比べて進歩があると思う。

数Ⅰでは、A. B. C. D.

数ⅡBでは、A. B.

と、その分類もすっかりしてきたし、線型代数を意図して、Aのパターンが作られたのではないかと思われる。

#### 新指導要領の内容

##### 数 学 I

##### A 代数・幾何

(3) ベクトル

平面上のベクトルの意味ならびにベクトルについての加法，減法および実数の乗法の演算について理解させる。

- ア. ベクトルの意味と相等
- イ. ベクトルの加法，減法および実数との乗法
- ウ. ベクトルの有向直線上への射影
- エ. ベクトルの成分表示
- オ. 用語および記号

ベクトル，零ベクトル，単位ベクトル，有向線分，成分，

(4) 平面図形と式

平面図形とその式についての理解を深め，それを用いて，図形の性質や関係を考察することができるようにする。

- ア. 平面上の座標
  - 二点間の距離，線分の分点
- イ. 直線と一次方程式
  - 平行関係，垂直関係
- ウ. 円の方程式
- エ. 簡単な二次方程式の表わす曲線

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $xy = k$  ( $k$  は定数) のグラフをかくことにとどめる。

- オ. 不等式と領域
  - 領域は，直線，円などで限られる簡単なものとする。
- カ. 用語および記号
  - 象限，だ円（長円）

B 解 析

(1) 写 像

写像の意味およびその合成と逆写像について理解させ，また，関数を写像としてとらえることができるようにする。

- ア. 写像の意味
- イ. 写像の合成，逆写像
- ウ. 写像としての関数
- エ. 用語および記号
  - 写像，合成（写像に関するもの），逆写像

数 学 II B

A 代数・幾何

(1) 平面幾何の公理的構成

平面幾何について、数学における公理の意味と公理的構成について理解させる。

ア. 公理, 定義および定理の意味

イ. 平面幾何の構成

ウ. 用語および記号

公 理

(2) 空間における座標とベクトル

座標とベクトルの概念を空間へ拡張し、それらを理解させ、基本的な図形を式に表わすことができるようにする。また、ベクトルが、平面においても、空間においても、ともに同じ考えに基づいていることを理解させる。

ア. 空間座標

イ. 点の座標, 二点間の距離, 線分の分点

ウ. 空間におけるベクトル

エ. 空間におけるベクトルの加法, 減法および実数との乗法。

オ. ベクトルの内積

カ. 直線, 平面および球の方程式

キ. 用語および記号

内 積

(3) 行 列

行列とその演算について理解させ、連立一次方程式が一つの方程式として表わされることや一次変換と行列との関係について理解させる。

ア. 行列の意味

イ. 行列の演算

加法, 減法, 実数との乗法, 乗法

ウ. 連立一次方程式

エ. 一次変換

オ. 平面上で, 原点を動かさない一次変換を扱う。

カ. 用語および記号

行列, 逆行列,  $A^{-1}$ , 一次変換, 加法定理 (三角関数に関するもの)

内容を見ると、数Ⅰでベクトル、数ⅡBで行列を入れたのが最も注目され、現指導要領に比べれば進歩していると思う。

しかし、数Ⅰでは、①(3)ベクトルと(4)平面図形と式、の関係をどうとらえてよいのか、ベクトルの成分表示と座標の関係、さらに座標をきめるための空間の構成はどうするのか、この点は不明である。

②写像の概念がBの中に入っているが、点の位置  $\Leftrightarrow$  座標  $\Leftrightarrow$  ベクトルの成分表示  $\Leftrightarrow$  位置ベクトル、の関係を判別するために写像という概念を用いるべきだと思う。



(3)のウで「射影」という用語があるが、写像の一種として位置づけるべきである。

③(4) のイ、ウを見るとベクトルの内積は導入することが出来ると思う。内積を数ⅡBへ残しておいて、(4) の項目を入れるより、(4) の項目の二次曲線を形式的に入れるのをやめて、内積を数Ⅰへもってきてはどうか。④ さらに基本的なことでは、数ⅡBへ平面幾何の公理的構成が入っているが、現指導要領でさえ、数Ⅰに空間図形を公理的に構成しようとしているのであるから、これは数Ⅰへおろすべきである。

#### 数ⅡBについて

① A(2)の考え方は全面的に賛成である。ただ、座標とベクトルの概念とは何をさしているのか、数Ⅰの②での批判の意味がここでも気になる点である。

② 数Ⅰで二次元空間、数ⅡBで三次元空間を扱うように思われるが、直線、平面、球の方程式というのは一語にならないのではないか。

むしろ、直線、平面は線型多様体に属するものであるからベクトルの一次結合のあとでやるべきであろう。

内積のあとにくるのは不適當ではなからうか。

③ 行列については初めての試みであるから、多くの実験の結果から見ると、行列については興味を示すものである。

その点ではっきりしないことは、連立一次方程式をとりあげた意味である。

逆行列を含めているので、行列環としてとらえるための布石か、それとも、形式的に表記するということかわからない。

折角、数Ⅰで直線と一次方程式という項目があるのだから、連立方程式を行列で表わすならば解の問題を図形と結びつけるべきではないか。

④ 一次変換は回転と相似変換ではないかと思われるがこれについては点の移動を扱う方が先きではないかと思う。

#### (3) 私のプランについて

以上の指導要領との比較を行った結果、私は、§1、§2に述べた理由によって、高校数学における代数・幾何教材として、線型代数を導入してみようと思う。

以下のプランは数Ⅰ、数ⅡBを通じて私が現在実験しつつあるプランである。

指導要領と比較して、次の点に留意して作っている。

① 集合、写像、空間の概念を基礎概念においている。

② 一次元ベクトル空間を構成的な立場で定義する。

③ なるべく三次元空間について考えることにした。その方が図形の方程式も一般化して考えられる。

以上のことに留意して次のようにテキストを作成したので、御批判をこいたい。

(1971. 4. 1)

## 「このテキストを学ぶにあたって」

このテキストは高一の諸君達が中学の数学を卒業して、新しく高校の数学に接するときに、高校の数学とはどんな目的でどんな方向で学ぶものであるかを紹介し、数学のあり方を見なおしてもらうために作られたものであります。

数学の歴史には三つの大きな転機があります。それは、

- 1° ユークリッドの幾何（エレメント）
- 2° デカルトの幾何（方法序説）
- 3° ヒルベルトの幾何（幾何学の基礎）

であります。

現代は 3° のヒルベルトの公理主義といわれる立場に立って、今までの数学が新しく、築きなおされています。これを現代数学とよんでいます。

現代数学発展の原動力になっているのは、代数学だという人が多いのですが、代数の勉強は単に数や式の計算や方程式を解く技術の習熟だけではなくて、その奥にひそむ数や式などの集合のもつしくみを求めることが目標であるというようになってきました。

このような考え方はもともと幾何学ではユークリッド以来、図形のもつ性質やそのしくみを追求して居りました。

それが、ヒルベルトの公理主義的な考え方の影響をうけて、代数学と幾何学が集合のしくみ（構造）をとらえるという点で共通点を見出し、いまでは、代数と幾何は互になくってはならぬ関係をもって発展しています。

この事実を具体的に諸君達に体験してもらうためにこのテキストは作られました。このテキストの勉強を手がかりにして、数学に興味をもち、自分で考えて、本を読み、自分の体験から何かを創り出すような態度が生れてくれば、大変うれしいことだと思います。

最後にこのテキストの具体的なネライをあげておきますので、学習中に自分でいまだどんなネライをはたしているのかを、意識して、学んで下さい。

1. 図形と方程式の対応をつけて考える。図形を方程式で、方程式を図形であらわし、その意味を理解する。
2. ベクトルを用いることによって、統一的な考え方、表現ができることを理解し表現、思考の体系化ができるようになる。
3. 単純な条件から多く意味のある結論が導き出される過程を理解し、そのような推論ができるようになる。
4. 特殊から一般、一般から特殊への思考法が一次元、二次元、三次元と空間が拡張されるにつれて、図形の表わし方がどのようになるか、次元の概念と方程式を用いて考える。以上のような点を具体的な目標として、学ぶことによって、現代数学の基本に接して欲しい。なお、参考図書は巻末にあげておいたので参考にして下さい。有意義な学習を祈ります。

- |                                                       |             |         |
|-------------------------------------------------------|-------------|---------|
| 1. 代数的構造に関するもの                                        |             |         |
| 方程式                                                   | 守屋美智雄       | 至文堂     |
| 現代代数学概論                                               | バーコフ・マクレーン  | 白水社     |
| 群論入門                                                  | 稲葉栄次        | 培風館     |
| ク                                                     | アレクサンドロフ    | 東京図書    |
| 代数学                                                   | 黒須・本田       | 共立全書    |
| 2. 現代数学に関するもの                                         |             |         |
| 現代数学の考え方                                              | 遠山 啓        | 明治図書    |
| 早わかり現代数学                                              | 岩堀長慶        | ダイヤモンド社 |
| 新しい数学                                                 | 矢野健太郎       | 岩波新書    |
| 3. ベクトルに関するもの                                         |             |         |
| ベクトル                                                  | 穂刈四三二       | 共立出版    |
| ピタゴラスからアインシュタインまで                                     | K.Oフリードリックス | 河出書房    |
| ベクトルとテンソル                                             | 安達忠次        | 培風館     |
| ベクトルと行列                                               | 長妻・松尾       | 国土社     |
| 4. 線型代数・幾何に関するもの                                      |             |         |
| 解析幾何学                                                 | 森・安藤        | 明治図書    |
| 現代代数入門(線型代数上・下)                                       | マックスウエル     | 明治図書    |
| 代数学と幾何学                                               | 矢野健太郎       | 裳華房     |
| 線型代数学                                                 | 吉田・高橋       | 培風館     |
| 初等解析幾何学                                               | 稲葉・伊関       | 朝倉書店    |
| 5. 洋書                                                 |             |         |
| A GEOMETRIC INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA (H. Pedoe) |             |         |
| LINEAR ALGEBRA (Serge Lang)                           |             |         |