

集合の交わり・結びに関する表現と
その内容(調査)

数 学 科 教 官 共 同 研 究

報 告 者 秋 葉 琇 一 郎

はじめに

高等学校および中学校の数学の中に集合をとり入れる場合、集合の果し得る（と期待される）一つの役割は、集合という一般的・基礎的な概念を利用して従来の指導内容について理解を深めたり、統一的な見方をしたりできるようにすることであると思う。このような役割を果し得るならば、同時に数学的な構造について、中・高のそれぞれの段階に応じた論理的な見方ができるようになることも期待される。しかし、そのためには、予め集合に関連する初歩的な事柄やことばについては、正確で、論理的な理解が当然要求されるはずである。

集合という概念は一面大変直観に訴え易い感じがあるが、数学的に極めて基礎的で、また抽象化された概念であるため、指導上、不用意に日常的なことば遣いをとり入れた場合には、却って理解の際に好ましくない混乱が起ることもある。

我々は、将来中学校の段階から、集合に関する考え方を導入し、高等学校の課程の中で、それを発展させると共に、それを活用して学習事項について理解を深めたり、統一的な見方がある程度できるようになればいいと思っている。

このような立場から、今回は特に集合の結合を表わす「結び」「交わり」をとり上げる。この二つの概念に関連して日常どのようなことばが現われるか。その不正確さ、あいまいさと、どのような点で不正確、あいまいであるかを調査し、それにもとづいて考えて見たい。集合教材は、高等学校の数学にとり上げられてから日が浅く、それだけ指導上問題となる点も少ないと思う。本稿はその一小部分ではあるが、今後の中学校・高等学校における集合教材の指導の上に参考にしたいと考えている。

1. and, or はどのようなことばで現わされるか

1. 調査の目的

生徒に自由に書かせた場合に, and, or に相当する部分がどのように表現されるかを調べる。

この節では二種類の調査を掲げる。

調査Ⅰは and, or をこのままの形で高二の生徒に示して書かせたものであり, 調査Ⅱは, 数直線上にとった範囲を, 生徒に書かせたものから, and, or に相当することばをとり上げたものである。

2-Ⅰ 調査Ⅰ

調査期日 '65年7月5日

対 象 高校2年 ふたクラス(87名)(記載されたものは, 高二に関する調査の部分である)

目 的 生徒が and, or を和訳した場合にどんな意味に解釈しているか(特に和集合や積集合を表わすような語訳をしているのかどうか)調べる。

問 題

2つの事柄, A, Bがある。次の場合に and と or の解釈を日本語でいえ。

- (1) A and B (答)
(2) A or B (答)

3-Ⅰ 調査Ⅰの結果

表1 (1) A and B の和訳の表現

表 現	回 答 数	表 現	回 答 数
AとB	16	A, Bともに	4
AかつB	10	Aと, そしてB	4
A, B両方	10	A, B両方同時に	4
A, Bの共通部分	8	A, Bに共通	2
A, B同時に	8	(その他, 各1名だけの表現を	
Aであり, またBである	4	下に示す)	

1名だけの表現

共通部分2つとも含む(連記した); Aその上にB; 両方とも; AでありBでもある; AとBの両方; 二つの異なる集合から, 一つずつA, Bが同時に成立; AおよびBとも; AとBの両方の共通な; AしかもB; など。

表2 (2) A or B の和訳の表現

表 現	回 答 数	表 現	回 答 数
AかB	21	AかBと両方	4
AまたはB	21	AかBかまたはその両方に含まれる	4
A, Bどちらか一方	4	AもBも	4
A, Bいずれか一方	4	A, B一方または両方	2
A, Bどちらかが	3	(その他各1名だけの表現を下	
A, B少くとも一方	3	に示す)	

1名だけの表現

AあるいはB; AもBも(連記した); AまたはBの総和どちらかを含む; A, BどちらかとA, B共

通；AまたはBの両方；AかBのどちらでもよい；AまたはBの一方；AとBのどちらか片方；AかBのどちらか一方でも含まれる部分の全体；AまたはBどちらか，両方の場合も含む；AあるいはBのどちらか一方；など。

2-II 調査II

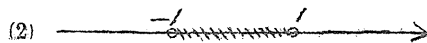
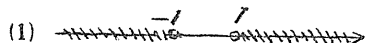
調査期日 '65年6月10日

対 象 高校1年ひとクラス(40名) (「不等式」はまだ学んでいない。不等号の基本性質を1時間指導してある)

目 的 数直線上に図示した範囲を不等式を使うやり方と，使わない文とそれぞれで書かせ，and，or に相当することばとして出て来たものを取り上げる。

問 題

次の斜線の範囲に実数 c がある。このことを正しく書き表わす式，文をそれぞれかきなさい。ただし直線は数直線で， -1 ， 1 は斜線に入らない。大小を表わす記号としては $>$ ， $(<)$ を，ことばとして， 1 より大(小)， -1 より大(小)を使うこと。



3-II 調査IIの結果

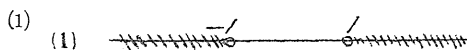


表3 不等式を使う場合

表 現	回答数
$c < 1$, $c > 1$	15
$-1 > c > 1$	12
$c < 1$ - または $c > 1$	6
$ c > 1$	6
$c < -1$ or $c > 1$	1

他に1名だけの回答がある。
ことばは使っていない。

表4 文でかく場合

—— (記入なし) ——	14
—— か ——	5
—— で ——	5
—— または ——	4
—— であり ——	1
—— があるいは ——	1
—— か —— かどちらか ——	1
—— また ——	1
—— かつ ——	1

他に「～の間でない」etc

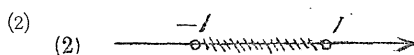


表5 不等式を使う場合

表 現	回答数
$-1 < c < 1$	28
$-1 < c > 1$	3
$ c < 1$	7

他に1名だけの回答がある。
ことばは使っていない。たと
えば $0 \leq c^2 < 1$ など。

表6 文で書く場合

表 現	回答数
—— (記入なし) ——	14
—— で ——	11
—— であり ——	4
—— でかつ ——	1
—— また ——	1
—— or —— でない ——	1

その他，無答，「 -1 から 1 まで」etc

4. 結果の考察

まず，使われることばが実にいろいろである。or, and に跨るものもあることがわかる。表現に使われたことばが正確でない。たとえば，調査Iの表2の中にある「AかBか」「AかB

かまたはその両方に含まれる」の二つをとってみれば、ことばの意味が使う生徒によって異なることがわかる。また、調査Ⅱ表3, 4, 表6の中にあるように、or, and に相当することばを使わないで、ただ並記する使い方が or and の両方に見られることなど、ことばの使用に対する自信のなさが表れている。

2. 集合を結ぶことば (and, or に相当する) のあいまいさについて

1. 調査の目的

前節の結果に現れたように集合の交わり、結びを表わすとき、日常用いられることばは非常に雑多であいまいさが少なくない。

1) 集合やそれに属する要素の間の関係を表わす日常的なことばが、どの程度、明確な共通的な内容をもつか。調査Ⅰ問1, 調査Ⅱ

2) ベン図で示された集合間の関係が、日常のことばでどのように表現されるか。

調査Ⅰ—2

この節では、中1, 中3を対象とした調査Ⅰ, 中2を対象とした調査Ⅱを掲げる。

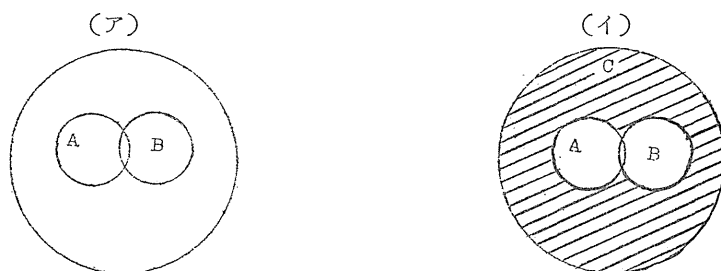
2. A 調査Ⅰ

調査期日 '65年7月

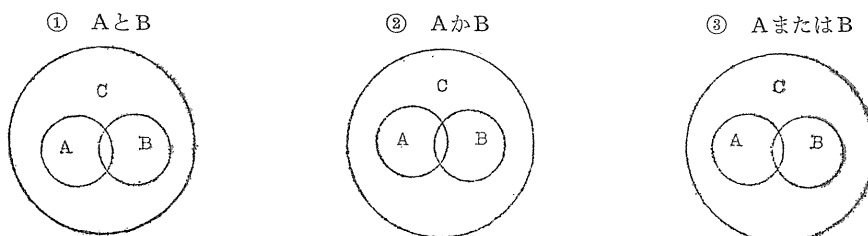
対 象 中1 60名, 中3 84名 計144名

問題 ある中学校で、あるクラスの生徒50人について、通学状況を調べたところ、電車を利用する生徒は15人、バスを利用する生徒は10人、歩いてくる生徒は30人であった。そして、このことは下図(ア)のように、電車を利用する生徒のあつまりをAとして左の小円で、バスを利用する生徒のあつまりをBとして右の小円であらわし、クラス全体を大きな円であらわすことができる。

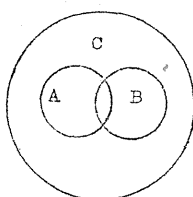
このとき、下図(イ)の斜線の部分Cは、歩いてくる生徒のあつまりをあらわしている。



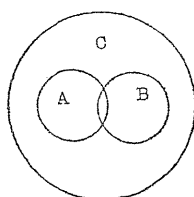
(問1) つぎの言葉でいいあらわされる部分に斜線をひいて示しなさい。ただし、斜線の引けない場合は、大円の下に×印をかきなさい。



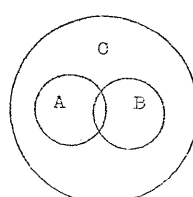
④ AおよびB



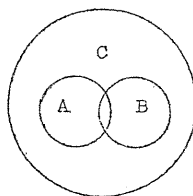
⑤ AでしかもB



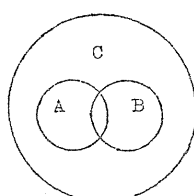
⑥ 電車とバスを利用する生徒



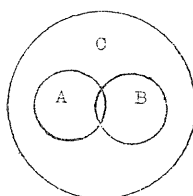
⑦ 電車かバスを利用する生徒



⑧ 電車もバスも利用する生徒



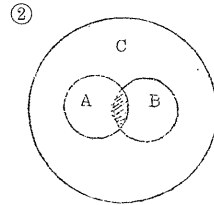
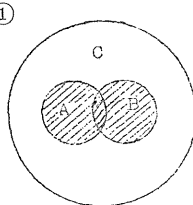
⑨ 電車でくるか、歩いてくる生徒



(問2) 下の①, ②の斜線の部分は、それぞれどのような生徒のあつまりをあらわしているか。I, IIの通りのいい方であらわしなさい。 ①

I. A, B, Cの記号を用いて

II. 「電車」、「バス」、「徒歩」のことばを用いて




3. I 調査の集計

表7

(問一)	学年				その他	× 印 と無答	
①AとB	一	25	32	1		2	この場合の「と」は、 1年では〇を、3年ではUをあらわすと解するものが多い
	三	50	27	2		5	
②AかB	一	22	2	22	1	13	1, 3年とも が最も多い 〔調査B参照〕
	三	26	1	40		17	
③AまたはB	一	21	3	21	1	14	同上 また×印が多い
	三	24	4	32		24	
④AおよびB	一	24	30	2		4	1年ではまだ〇とUの区別がつかないが、3年になると、Uと解している(※印)
	三	※50	18	1	2	13	
⑤AでしかもB	一		60				「でしかも」の言葉が〇を表わというのが一番わかりやすい
	三		83			1	
⑥電車とバスを利用する生徒	一	5	54			1	①と比べ、この場合の「と」は、 はつきり〇を表わすと解される
	三	25	57			2	
⑦電車かバスを利用する生徒	一	21	1	30		8	②と全く同様に が多い
	三	28		46	1	9	

⑧電車もバスも利用する生徒	一 三		60 55			5	この表現は、非常に明確に内容をとらえられるように思われる
⑨電車でくるか、歩いてくる生徒	一 三	34 39	19 35	1 2		6 7	「電車で」を「電車だけで」と解したものが多し

表 8 (問2) ①のIによる表現

表	現	一年	三年	計 (%)	考	察
AとB		16	38	57 (40)	1年では	
AかB		5	14	29 (20)	半数が「AとB」, 「AかB」	
AおよびB		4	15	19 (13)	他の半数は出来るだけ正確に表現しようとして苦心している	
AまたはB		3	4	7 (5)		
Cでない		4	1	5		
AかBかAとB※		1	2	3	3年では	
AかBかAB ※		2	2	4	「AとB」が約半数で圧倒的	
AかB, またはAとB※		2	2	4	1年に比べて「AおよびB」が多い	
AとBのどちらか又は両方		1		1	※印は「AかB」の表現内容を  と解したものの	
AとBと両方		1		1		
AとBとAでしかもB		1		1		
その他		7	4	11		〔調査2参照〕
無 答			2	2		

(注) *その他、の表現には、「AとAに含まれないB」, 「A, Bを使う人」, 「 $A+B-(A-B)$ 」, 「AかB, AおよびB」, 「 $A \cdot B \cdot AB$ 」, 「 $A+B$ 」などがある。

表 9 (問2) ②のIによる表現

表	現	一年	三年	計 (%)	考	察
AとB		23	12	35 (25)	「AとB」, 「AでしかもB」が圧倒的	
AでしかもB		24	60	84 (60)	3年では1年に比べ「AでしかもB」が多く「AとB」が少なくなっている。	
AおよびB		4	4	8 (6)		
AとBの両方		4	2	6 (4)	AとBの両方と補足したものが見られる。	
AでありBである。		2	2	4 (3)		
AもBも利用する人		1		1		〔調査2参照〕
A-B		1		1		
AとB, AでしかもB			2	2		
AB			1	1		
$A+B-(50-C)$			1	1		

表 10 (問2) ①のIIによる表現

表	現	一年	三年	計 (%)	考	察
電車とバスを利用するもの		6	19	25 (17)	グループの場合(I)では「と」, 条件(要素)の場合(II)では「か」がUの表現として多く用いられている。	
電車かバスを利用するもの		21	26	47 (33)		
電車およびバスを利用するもの		2	5	7 (5)		
電車またはバスを利用するもの			4	4	「電車かバス」が, 1, 3年とも全体の3分の1	
電車とバス		2	5	7 (5)		
電車かバス		1	1	2	「電車, バス, それと両方」のような表現をしたものが多く見られる。約20名(15%) (*その他、の表現は殆んどこれ) ※印	
電車またはバス			2	2		

徒歩以外	4	3	7 (5)
電車を利用するものとバスを利用するもの	3	2	5
電車, バスを利用するもの	5		5
電車かバスか両方を利用するもの※	3	3	6
そ の 他 ※	11	10	21
無 答	2	4	6 (5)

表11 (問2)②のⅡによる表現

表 現	一年	三年	計 (%)	考 察
電車とバスを利用するもの	22	21	43 (30)	上表①に比べて、表現がまとまっている。 グループの場合(Ⅰの表現)では「でしかも」が圧倒的であったが、条件を云い表わす場合(Ⅱの表現)では「……も……も」が圧倒的(※印)
電車でしかもバスを利用するもの	3	9	12 (8)	
電車およびバスを利用するもの	3	3	6 (4)	
電車もバスも利用するもの	20	39	59※(41)	
電車とバスの両方を利用するもの	10	7	17 (12)	
電車, バスを利用するもの	1	1	2	
そ の 他	1	1	2	
無 答		3	3	

2. 調査Ⅱ

調査期日 '65年 6月11日

対 象 中学2年 40名

問題1 98人の受験者に技術試験を行なったところ、第一次試験では53人が合格した。(これをAとする)。翌日行なった第二次試験では62人が合格した。(これをBとする)。

第一次にも第二次にも合格しなかった人が31人いたが、これは技術が未熟と判定せざるを得ない。(全員が第一次、第二次2回受験した。)

(イ) 98人の受験者を第一次だけ合格、第二次だけ合格、第一次第二次とも合格、どちらも不合格のグループにわけて人数を次の表に記入しなさい。

第一次 第二次	合 格	不 合 格
合 格		
不 合 格		

(ロ) 第一次、第二次を総合して、合格と決定したものに技術免許証を出す

ことになっている。総合判定で合格を定めるには、次のようないろいろな方法が考えられる。それぞれの場合に、免許証は何枚出すことになるか。かっこの中にかきなさい。数が不明の場合には×印をかきなさい。

- | | |
|--------------------|--------------------|
| (1) Bだけが合格 () | (2) AでもBでも合格 () |
| (3) AまたはBが合格 () | (4) AとBが合格 () |
| (5) A, Bどちらか合格 () | (6) A, Bどちらも合格 () |
| (7) A, Bどちらも合格 () | (8) AかBが合格 () |
| (9) AおよびBが合格 () | (10) AかつBが合格 () |

問題について (イ)は予備的な問題で、次の問題の解答を引き出す準備として課した。

3-II 調査IIの集計

表12

問	ベン図						×印 (どちらとも いえない)	その他	無答
(1) Bだけ				31				7※	2
(2) AでもBでも	21	8	4				2	3	2
(3) AまたはB	11			1	4		19	3	2
(4) AとB	11	19	3				1	4	2
(5) A, Bどちらか	9			1	5		19	4	2
(6) A, Bどちらも	12	17	4				2	3	2
(7) A, Bどちらでも	21	6	5				3	3	2
(8) AかB	10			2	4		20	2	2
(9) AおよびB	11	18	4				1	4	2
(10) AかつB	12	13	2	1	2		3	5	2

4. 結果の考察

1) A, Bが集合の名称か性質(集合を定める条件)か, 識別が明らかでない。

調査Iで集まりを与えた場合でも, 集合の名称と条件との差異に敏感でないためもあるが, やはり「と」「および」の内容がUと∩の二つに分れてしまう。(表7, 表①, ④, 表8, 表9, 表12, (4), (9)) しかし調査I⑥のような文中では, 条件を表わすとみた解釈(U)になるようである。

2) 「または」「か」「どちらか」について, 共通部分を除外するものが少ない。(表7, ②, ③, 表8, 表12, (3), (8))

3) 同じく上のことばは, どちらか一方であるが対象が定まらないとするものが多い。(表7, ②, ③, 表12, (5), (9))

4) 調査II(口)(1)「Bだけが合格」の答で, 31名は「第二次試験合格者だけ」と解し(グループ), その他のうち4名※は「第二次試験だけ合格したもの」と解した(条件)。(表8, 9参照)

5) 殆んどのことばは, 使われる内容が一つに定まっていないので, このまま使用すれば当然混乱が起きる。

またベン図で示した関係をことばで表現させた場合, 上と同じく, 相反することばが使われる。

3. 数直線上の範囲におけるU∩に当ることばのあいまいさ

1. 調査の目的

ここでは, とくに材料をしぼって, 不等式の表わす範囲をとり上げて, 集合の相互の結合をいい表わすことばが, どのような内容で受けとられるかを調べる。

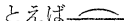
2. 調査の実施と内容

調査期日65年9月28日

対 象 高校1年，ひとクラス 40名

(一次，二次不等式の指導を終った。不等式の解として用いることは「または」「かつ」を用いたが，意図的に一般的なことばや用法などに触れずにいった。)

問題

次のように与えられた不等式では数直線上のどこがXの存在する範囲と考えますか。その範囲をそれぞれの数直線上にたとえ  のように示せ。もし範囲がない，或は数直線全体が範囲となるときは，それぞれ「ない」「全体」という字に○を囲っておくこととします。

1 2
| |
— — ない 全体

(註：以下各問とも，(1)と同じように数直線と「ない」「全体」を附してあるが，ここには略す)

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| (1) $X > 1, X < 2$ | (20) $X > 1 \text{ or } X < 2$ |
| (2) $X > 1$ でしかも $X > 2$ | (21) $X < 1$ だし $X > 2$ |
| (3) $X < 1$ 或いは $X > 2$ | (22) $X > 1$ でしかも $X < 2$ |
| (4) $X > 1, X < 2$ の両方 | (23) $X > 1 \text{ and } X > 2$ |
| (5) $X > 1, X > 2$ のどちらか | (24) $X > 1, X > 2$ の両方 |
| (6) $X > 1$ と $X < 2$ | (25) $X > 1$ 或いは $X < 2$ |
| (7) $X < 1$ で $X > 2$ | (26) $X < 1, X > 2$ のどちらか |
| (8) $X > 1$ でかつ $X < 2$ | (27) $X < 1 \text{ or } X > 2$ |
| (9) $X > 1 \text{ or } X > 2$ | (28) $X > 1$ または $X > 2$ |
| (10) $X > 1$ または $X < 2$ | (29) $X < 1$ でかつ $X > 2$ |
| (11) $X < 1$ か $X > 2$ | (30) $X > 1$ で $X > 2$ |
| (12) $X > 1, X > 2$ | (31) $X < 1 \text{ and } X > 2$ |
| (13) $X < 1$ と $X > 2$ | (32) $X < 1, X > 2$ |
| (14) $X > 1$ か $X > 2$ | (33) $X > 1$ か $X < 2$ |
| (15) $X < 1$ または $X > 2$ | (34) $X > 1$ 或いは $X > 2$ |
| (16) $X > 1 \text{ and } X < 2$ | (35) $X < 1, X > 2$ の両方 |
| (17) $X > 1, X < 2$ のどちらか | (36) $X > 1$ と $X > 2$ |
| (18) $X > 1$ だし $X > 2$ | (37) $X > 1$ だし $X < 2$ |
| (19) $X > 1$ で $X < 2$ | (38) $X < 1$ でしかも $X > 2$ |
| (20) $X > 1$ でかつ $X > 2$ | |

3. 調査の集計

表13 註：表中(*)の数字は， $(A-B) \cup (B-A)$ 即ち「一方だけ」とした数である。

	$X > 1 \square X < 2$			$X < 1 \square X > 2$			$X > 1 \square X > 2$		
	∩	U	その他	∩	U	その他	∩	U	その他
， (ことばはない)	31	9		25	15		24	14	2
でしかも	40	0		36	3	1	37	3	
でかつ	38	1	1	39	1		37	2	1
， の両方	17	23		17	23		19	21	
と	20	20		17	22	1	18	20	2
で	37	1	2	35	3	2	34	2	4
and	31	8	1	29	10	1	30	8	2

，ただし	39	0	1	39	0	1	39	0	1
或いは	1	35	4 (2 [*])	0	36	4	2	35	3 (2 [*])
， のどちらか	1	34	5 (4 [*])	0	39	1	0	34	6 (4 [*])
or	1	37	2 (1 [*])	0	40		0	38	2 (1 [*])
または	1	38	1 (1 [*])	1	39		1	37	2 (2 [*])
か	4	33	3	3	36	1	5	34	1

4. 結果の考察

- 1) 大多数が \cap として受けとることば：「でかつ」「でしかも」「ただし」
- 2) 大多数が \cup として受けとることば：「または」「or」
- 3) 略，二分することば：「の両方」「と（これは不等式，たとえば $X > 1$ を $\{X \mid X > 1\}$ という集合とみたものが \cup を採ったと見られる。）
- 4) $X > 1 \square X < 2 : X < 1 \square X > 2 : X > 1 \square X > 2$ の三形式を通じてみたとき数値が一定していない。
 \cap を表わすと受けとられることばでは， $X < 1 \square X > 2$ ， $X > 1 \square X > 2$ の場合に数値が低下する。
 \cup を表わすと受けとられることばでは， $X > 1 \square X < 2$ ， $X > 1 \square X > 2$ の場合に，数値がやはりいくらか低下する。
このことは，「でかつ」「または」そのほか上の1)，2)に掲げたことばの場合でさえ，特定の不等式の範囲という問題を離れては，一般的に論理上の意味にまで正しい把握がなされていないのではないかと，従って不等式の取扱い方として学んだことがらの表面的な把握となっているのではないかと示す。（[5] 参照）

4. 集合の呼び方による障害

1. 調査の目的

二つの集合の結合を表現する言葉として，数学を学んだ吾々は，「A or B」をA，Bの合併，「A and B」をA，Bの共通部分と理解する。生徒もまた当然そのように受取ることを期待していたにもかかわらず，必ずしも予想通りにはなっていないことが前調査で知られた。and や or を日本語になおして，……と……，……かつ……，……または……，等としても，受取り方の混乱は同じことである。

数学の学習の浅い中学下学年ほど，その程度が大きいところから考えてみても，恐らく，言葉としての表現用語が適切でないことがその原因であるらしい。その原因を追求する一つの試みがこの調査である。

集合の呼び方に，通常二つの区別が考えられる。一つは集合の名称で，集合A，集合Bと呼ぶ呼び方であり，もう一つは元が集合に属する条件A，Bで呼び，条件Aの集合，条件Bの集合という呼び方である。二つの集合を結合するのに，「AとB」という言葉を使うとき，A，Bが集合の名称であるときは，結合した集合は両者によって拡大された（合併）感じがあるが，A，Bが条件であるときには，A，Bを合わせた条件によって結合された集合は小さくなる（共通部分）のではないかと感じる。ここに混乱の一原因を求めようとして，なるべく素朴な形で，集合をまだ学習していない中学2年について調査を行うことにした。

2. 調査の実施と調査内容

調査期日 '65年 6月11日

(ここに記載するのはその調査の一部分である。)

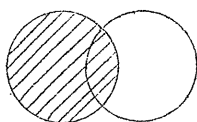
対 象 中学2年B組(40名)

調査内容 集合の呼び方を (1)集合の名称によるとき, (2)集合の条件によるとき, の二つに分けて, 「AとB」「AまたはB」を生徒がどのように理解するか, をベン図によって調べる。

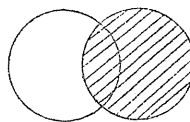
問 題

〔1〕

グ ル ー プ A

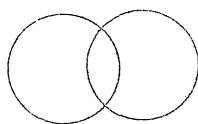


グ ル ー プ B

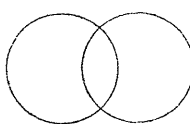


これにならって, 次のグループの表わす範囲に斜線を引きなさい。(引けない場合は×印を書きなさい)

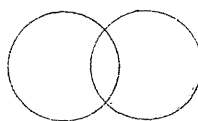
㊶ グループAとグループB



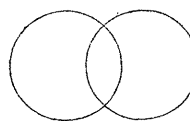
㊷ グループAまたはグループB



㊸ グループAおよびグループB

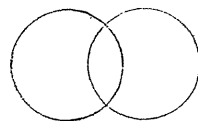


㊹ グループA, グループBどちらか

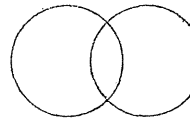


〔2〕 次の図の左の円内はAの性質をもつグループ, 右の円内はBの性質をもつグループとする。このとき, 次の性質をもつ範囲に斜線を引きなさい。

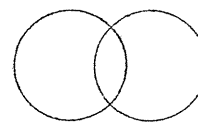
㊶ AとBの性質をもつグループ



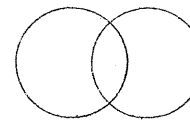
㊷ AまたはBの性質をもつグループ



㊸ Aの性質のグループ
およびBの性質グループ










㊹ AおよびBの性質のグループ



3. 調査の結果

調査の結果を集計して表にまとめてみると次のようになる。

表14

問 題 回 答	A, Bがグループを表わす(集合の名称)				A, Bが条件を表わす(所属条件)			
	イ	ロ	ハ	ニ	イ	ロ	ハ	ニ
	AとB	AまたはB	AおよびB	A Bどちらか	もAとBの性質をもつ	質AまたはBの性質をもつ	性Aの性質のグループBの性質のグループ	質AおよびBの性質をもつ
	27	3	25	2	3	6	19	8
	6	5	7	3	32	4	3	25
	3	7	1	6	•	14	11	1
 または 	•	1	•	1	•	•	•	•
	•	4	1	5	•	3	•	•
	•	1	•	2	•	•	1	•
×	1	14	1	15	1	7	1	1
無 答	3	5	5	6	4	6	5	5

集計表の左側のらんは、A, Bが名称を意味するとき、右側のらんはA, Bが集合所属条件を意味するときであり、④はどちらも「……と……」、⑤はどちらも「……または……」の回答を対比して示す。左側のらん⑥、⑦は「…および…」, 「……どちらか」といいなおしたものの。右側のらんは一応、条件のように見えながら、集合の名称、条件の区別が明らかでない言いまわしである。

4. 結果の考察

1) A, Bがグループの名称を表わす場合について

- (イ) 「AとB」と「AおよびB」は大体同じ傾向の回答を得る。ただし、内容は案外であって、「A and B」として数学では交わり(共通部分)を期待したいところであるが、生徒は大部分が結び(合併)と解する。交わり(A, Bの共通部分)という回答は僅かしかない。
- (ロ) 「AまたはB」と「A, Bどちらか」も同じような回答が出る。これは「A or B」つまり和集合という答が得られれば、数学の学習と一致して好都合なのであるが、回答はあいにくそうになってくれない。

一番多い回答は、AまたはBのどちらか一方だけ、したがって図には書き表わせないとするものである。次に目立つ回答は、A、Bの結びからそれらの共通部分を除いたものである。ともかく、吾々が期待するA、Bの結びを回答する人数は40人中2人から3人しかいない。

2) A、Bが集合所属条件を表わす場合について

(i) 「AとBの性質をもつ」の回答は、吾々の期待通り、A、Bの交わりが圧倒的に多い。
(もっとも、少数であるが交わりとしないものもある。)

(ii) しかし、「AまたはBの性質を持つ」はまだ思い通りにならない。A、Bの結びとの答は20人に増加するが、その中の14人は合併から共通部分を除いた図を書いている。

また、図には書き表わせないとするもの(その気持ちは恐らくA、Bどちらか一方だけであるから、かけないとするものであろう)が目立つ。

3) ともかく、A、Bが名称の場合と条件の場合とで、回答はすっかり違ってくるのであるが、A、Bを条件として、表現するときの and, or に当ることばの使い方の方が数学での慣用に近い回答が得られる。

4) しかし、A、Bが条件を表わす場合でも、表現の仕方によっては、なお、名称とまぎれ易い場合もでてくる。それが右側のらんの⊕, ⊖で、「Aの性質のグループおよびBの性質のグループ」という場合と、「AおよびBの性質のグループ」という場合とで、集合の交わりと結びが正反対にとられてしまう例もある。

5. 条件を結ぶ and, or の論理上のはたらきと文脈の中での受けとられ方

1. 調査のねらい

A、Bなどを便宜のため、集合を定める条件とし、 $A(P)$ を「PはAである」という、真ないし偽の命題とすると、論理上の約束からは

$$A(P) \text{ or } B(P) \qquad A(P) \text{ and } B(P)$$

は、 $A(P)$ 、 $B(P)$ の真偽だけで定まる。ところが、Pがみたす条件、Pがみたさない条件をあらかじめいくつも与えておいてその中にA、Bを入れておくと

$$A(P) \text{ or } B(P) \qquad A(P) \text{ and } B(P)$$

の真偽の判定に、 $A(P)$ の真偽、 $B(P)$ の真偽、それ以外の条件をPが真とするか偽とするかの三つがどのように影響するか(集合の名称は使わない)。

1) $A(P) \text{ or } B(P)$ 、 $A(P) \text{ and } B(P)$ を理解する際、条件AやB、がどのように影響するか、またAやB以外のどんな条件がどのように影響するか、どの程度論理的な正確さを以て受けとられるかを知りたい。

2) or, and に当ることばとしては、

(or) : — または — ; — か — のどちらか ;

(and) : — でかつ — ; — , — の両方 ;

をとり上げ、ことばの相違がここにどんな影響を与えるかをしらべたい。

2. 調査の実施と内容

調査期日 '65年10月6日

対 象 高校1年、ひとクラス 39名

問 題

表は10人の生徒（仮に1番～10番としてある）の下記のクラブへの加入状況であって

Z : 柔 道 部 員
Y : 野 球 部 員
O : 音 楽 部 員
S : 生 物 部 員

と略記してある。空欄はそのクラブの部員でないことを示す。

Z	1	2	3		5					
Y		2	3	4	5	6			9	
O	1	2		4		6	7	8		
S					5	6			9	10

上の表をみて、次の文のうちで正しいと思うものは○を、正しくないと思うものは×を、文の番号につけなさい。

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (1) 4はYまたはOである。 | (7) 1はZ, Oの両方である。 |
| (2) 5はYかSのどちらかである。 | (8) 6はYまたはOである。 |
| (3) 6はY, Sの両方である。 | (9) 2はYまたはSである。 |
| (4) 9はYでかつSである。 | (10) 7はZかOのどちらかである。 |
| (5) 10はYまたはSである。 | (11) 5はZでかつYである。 |
| (6) 6はZかYのどちらかである。 | (12) 3はZかYのどちらかである。 |

問題の説明

12個の文は、どれも、下の形にしてある。

生徒(P)は、——クラブ員 (or) ——クラブ員 である。
(and)

また { (or) : —— または —— ; か —— のどちらか ;
(and) : —— でかつ —— ; —— , —— の両方 ;

の一つ一つを枠内に入れてある。

文の型は次の通り

or の文 :

I 型 (文1 : 文12) {文中の二クラブ} = {生徒の加入クラブ}

II 型 (文8 : 文2) {文中の二クラブ} \subseteq {生徒の加入クラブ}

III 型 (文5 : 文10) {文中の二クラブ} \supseteq {生徒の加入クラブ}

IV 型 (文9 : 文6) {文中の二クラブ} , {生徒の加入クラブ} が一クラブを共有, それぞれに共有しないクラブがある。

and の文 :

I 型 (文4 : 文7) {文中の二クラブ} = {生徒の加入クラブ}

II 型 (文11 : 文3) {文中の二クラブ} \subseteq {生徒の加入クラブ}

註 : 論理上すべての答は yes である。○, ×の数に拘らず、一問一問判断するように注意してから答えをかかせた。

3. 集 計

表15

	I 型	II 型	III 型	IV 型
——または——	11/39	6/39	21/39	14/39
——か——のどちらか	6/36	5/39	37/39	22/39

表16

	I 型	II 型
——でかつ——	39/39	36/36
——, ——の両方	38/39	37/39

註：表15, 表16とも $\frac{\text{yesの数}}{\text{被検者数}}$

4. 結果の考察

1) and については、生徒 (P) のみたす他の条件 (生徒が加入しているほかのクラブの有無) に影響されることは非常に僅かであることがわかった。すなわち、and の受けとり方に関する混乱は、論理的な (真偽の) 問題とは別なものであろうと断定される。

またこの調査にとり上げた二つのことば「一でかつ一」、「一、一の両方」もほとんど生徒の判断に影響がなかった。

2) or については事情は全く違ってくる。これは注目に値すると思う。

or の論理上の意味についてあらかじめ指導されていない生徒は、論理上期待されるようなやり方で判断を下すことはむしろ少ない。更に論理上期待されるような回答の数は I 型～IV 型のような型によっても変動する。

「P は A or B である」を正しいとするものの数についてみると

○P が実際に、A, B の両方をみたす場合：正しくないと思えるものが多数である。なお、これは前節の or を「いずれか一方」と見る考えにつながっている。I 型, II 型 (表 7, 13, 14)

○P が実際に、A, B の一方だけをみたす場合：正しいと思えるものは、上の場合よりは増える。それでもなお、半数にみえないことが多い。III 型, IV 型。P が他のクラブにも加入しているかどうかは III, IV 型のばあいでは、答にかなりはっきりと影響する。

また、二つのことば「一でかつ一」、「一か一のどちらか」に対応する表の yes の答を比較すると、ことばによる相違も現われている。

ま と め

[1], [2] を通じて、いい表わすのに用いられることばとその内容に関する混乱のあることが認められる。以下 [5] までの調査から出て来る問題の主なものを拾い出すと、大体次のようになる。

1) 「と」、「および」などのことばについて：この一群のことばには、時には、「で」、「であり」、「かつ」なども入る (表 4, 6, 12, 13) が「で、しかも」は交わりに一致する (表 7, 13)。この一群は、二つの集合の結びを表わすとも、交わりを表わすとも受けとられる。

実際、条件 A (・), B (・) に対して、

$$\{P \mid A(P) \text{ または } B(P)\} = \{P \mid A(P)\} \cup \{P \mid B(P)\}$$

$$\{P \mid A(P) \text{ か } B(P)\} = \{P \mid A(P)\} \cap \{P \mid B(P)\}$$

なので、回答は、上の二式のそれぞれの□内を答えたものともいえないことはない。

詳しくみると、A, B を条件として与えた場合は、共通部分の方にかなり一致する。(表 14, 16)。A, B をグループ、集まりなどとして与えた場合、今度は、A, B の合併とする答がふえ

るが、依然として共通部分とする者もあり、また、この傾向は、中学の下の学年では目立つ。
(表7, 14)

次のように考えられる。

生徒は、集合、集合を定める条件、という明確な区別を(指導されない間は)意識せず、Aという集まりというように与えておいても、抵抗感なしにそれを条件A(のようなもの)におきかえてしまうのではないか。(表3, 5, 「で」の項参照)。このことは、内容的に、まず要素(元)があって、それから条件を通して集合が考えられる、という思考過程から、自然な傾向であると思う。

我々は、集合を定める条件に対して、集合の交わりを表わすことばとして「であって」「かつ」「と」などを使いたいと考える。その際、混乱を防ぐために、あらかじめ、「集合」と「集合を定める条件」の区別が指導されることが望ましい。(表14)

集合としてとり上げる場合には、「集合Aと集合B」のようないい方にやや危惧を感じるので、むしろ「集合A(と)集合Bの結び」「……の合併」など、高校に数学用語として使われ始めたことばを添えるのが適切ではないだろうか。

2) 「か」、「または」などのことばについて：この一群のことばには、時に、「のどちらか(いずれか)」なども入る。

(2・1) この一群には、「どちらか一方であるが、どちらかはいえない」という受けとり方がある。(中学生には多い。)これは条件から集合へ移されていないことから来るものであろう。高校に関しては少ないようである(表7, 12, 13)。

2・2) 次に、この一群には、「いずれか一方だけ」という受けとり方がある。(表13, 14, 15,)ベン図による調査(表14)でも、加入クラブに関する文を判断させた調査(表15)でも、「いずれか一方」とする数字が「少くとも一方」を上廻る。高校2年生になると、「少くとも」の意味であることを意識していて、それを強調しようとする形跡が、挙げたことばの中に見られる(表2)。数学で使われている論理上の判断として採る「少くとも一方」という受取り方の方が少ないというこの傾向は、集合に関連した一般的な指導がない限り、学年によらない。この喰い違いは、日常のことばとしての「か」「または」と、数学において条件を結ぶことばとしての「か」「または」との目立つ相違である。

この点については、集合の考えの指導に関連して、条件を結ぶ「か」「または」を「少くとも」という意味で用いること(数学で)を理解させたい。不等式、領域など、このことばを用いる機会があるが、不等式、領域などにおけるその都度の個々別々な指導で終らせないで、一般的な用法として示し、その内容を適当な機会に論理的に捉えさせ、併せて「少くとも」という考えの便利さを示すことができるのではないか。

(2・3) 「か」「または」などの一群のことばに関する第三の問題は(2・2)に現われた論理上の判断に関連している。Pという生徒が、野球部員であるという事実が、問の近くに与えられていると、「Pは柔道部員または音楽部員である」「Pは柔道部員か音楽部員のどちらかである」という文(命題)の判断が「」以外にある事実に影響される(表15)。(2・2)の場合と同じく、この点についても、(当然具体的な例に戻りながら)「か」「または」の入っている文(命題)の真偽について、一般的な論理上の判断のしかたを指導する必要があるのではないか。

尚(2・2)(2・3)に関連して、真偽表の指導なども考慮に上ると思われる。記号論理学、真偽表などに及ぶにせよ、及ばぬにせよ、論理上の問題として取り扱うことで、一般的な理解を与えることが好ましいと思う。

この一連の調査の結果から、1), 2) を通じて
集合の結び、交わりに対応する or, and を示すことばを、条件を結ぶものとして用いたい。この
ことに応じて、集合と集合を定める条件を区別できるように指導したい。

集合については、混乱を避けるためには、「結び」「交わり」：「合併」「共通部分」を挙げて
おきたい。＊ 註

条件を結ぶことばを用いた命題の真偽の判断については、一般的な論理上の判断のしかたとし
ての指導を考えたい。

我々は当初、条件を結ぶことばとして、特定の一語づつ (or, and に対応して) を定めること
をも念頭においたが、この点については、適当なことばについて一致を見なかった。これはむしろ
自然な結果と見るべきものであるかもしれない。我々の日常に用いることばは、and と or に
関しても多彩であって、仮に我々が数学の指導上はこれ、と規定しても、数学もまた日本語で指
導され、日本語で学習される以上、このように基本的なはたらきを表現することばは絶えずどこ
からでも入り込んでくるであろうから。

＊ 註： $A \cup B$, $A \cap B$ を表わす用語を挙げてみると

$A \cup B$: 結, 結び (join) ; 合併 (集合) (union) ; 和 (集合)
(sum)

$A \cap B$: 交, 交わり (meet) ; 共通部分 (Intersection) ; 積 (集合)
(product)

和集合, 積集合の用語にて対しては屢々, $A + B$, $(\sum A_i)$, $A \cdot B$ ($\prod A_i$) が記号とし
て現れる。「+」, 「 \cdot 」は実数, 複素数における演算 (体の演算) との間に混乱を起す
ことへの懸念および他の二, 三の理由からも, \cup , \cap を採りたい。