

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：12102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887007

研究課題名(和文) アルゴリズム的グラフ理論と数理最適化に関する研究

研究課題名(英文) Study on Algorithmic Graph Theory and Mathematical Optimization

研究代表者

佐野 良夫 (SANO, Yoshio)

筑波大学・システム情報系・助教

研究者番号：20650261

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、ある集合族の交叉グラフとして表現可能なグラフおよびそれらに関連する離散構造について、組合せ的・行列論的・代数的な手法を用いて研究を行った。より具体的には、(1)競争グラフおよびその関連についての研究、(2)グラフの最小固有値とホフマン・グラフに関する研究、および、(3)グラフ上の代数構造であるトラベル・グルーポイドについての研究を行い、それぞれについて新たな研究成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I studied graphs that are represented as the intersection graphs of some specified set families by using combinatorial, matrix theoretical, and algebraic methods. More concretely, I studied on (1) competition graphs and related notions, (2) graphs with bounded smallest eigenvalues and Hoffman graphs, and (3) travel groupoids which are algebraic structures defined on graphs, and I obtained several new results for each research field.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ理論 競争グラフ グラフの競争数 交叉グラフ グラフ固有値 ホフマン・グラフ トラベル・グルーポイド

1. 研究開始当初の背景

本研究で扱った交叉グラフについては古くから研究されており、1945年にはすでに Marczewski が、全てのグラフはある集合族の交叉グラフであることを示している。このことから、交叉グラフを使った数理モデル化は十分一般的であると言えることがわかる。交叉グラフとして考える集合族のクラスを制限することで、これまで非常に多くの様々なグラフ・クラスが考えられてきた。その1つに、競争グラフと呼ばれるものがある。競争グラフとは、ある有向グラフの頂点の外近傍の族の交叉グラフとなるグラフのことである。この競争グラフは、生態学において食物連鎖における競争関係を表す数理モデルとして、1968年に生物学者である Cohen によって考えられた概念である。その後、競争グラフという数理モデルは、生態学における問題を扱うためだけでなく、他の分野への様々な応用や、また数学的興味から多くの研究者によって研究されてきた。

2. 研究の目的

離散的な対象に対して、よく扱われる数理モデルの1つに交叉グラフ・モデルがある。本研究の目標を簡単に述べると、様々な集合族の交叉グラフとして表現可能なグラフを、組合せ的・行列論的・代数的な手法を用いて研究することでその数理構造を明らかにすることを本研究では目標とする。さらに、様々な集合族の交叉グラフを数理モデルとして採用する際の妥当性、および、その数理モデル上での様々な最適化問題に対しそれを高速に解くアルゴリズムが存在するかどうかに関しても研究を進めたい。

3. 研究の方法

研究の方法としては、本研究に関連する論文・文献調査を継続的に行うとともに、本研究に関連する国際会議や研究会に参加することで最新の情報を収集しつつ、共同研究者たちと定期的に連絡を取り合うことによって、計画的に研究を推進した。特に以下の3つについて順に研究を進めた。

1. 様々な集合族の交叉グラフとして表現可能なグラフの数理構造の研究
2. 最小固有値を制限したグラフに対する禁止部分グラフ列挙問題の研究
3. グラフ・クラスとグラフ上の離散最適化問題の研究

4. 研究成果

(1) 有向グラフの頂点の外近傍のなす集合族の交叉グラフである競争グラフおよびその一般化や関連するに関して、以下の研究成果が得られた。

競争グラフに類似する概念である系統グラフについて研究を行い、平面的有限点集合から誘導される半順序に対応する有向グラフの系統グラフとして得られるようなグラフの特徴付けを与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

競争グラフの一般化である競争ハイパーグラフについて研究を行い、平面上の有限個の点集合から得られる半順序構造に対応する有向グラフに対し、その競争ハイパーグラフの構造についての特徴づけを与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

競争グラフに類似する概念であるニッチ・グラフについて研究を行い、実線分の集合から得られる半順序構造に対応する有向グラフに対し、そのニッチ・グラフの完全な特徴づけを与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

競争グラフの概念からグラフの競争数というグラフ不変量が定義される。競争数の計算は一般に NP 困難問題であるのだが、サイクルの補グラフ、およびさらにより一般的なあるタイプのサーキュラントグラフに対して、その競争数の正確な値を与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

一般のグラフの競争数に対する下界として、これまで Opsut によるものが2つ知られていたが、その2つの下界の共通の一般化として、グラフの競争数に対する新たな下界を与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

グラフの競争数がそのグラフの(辺クリーク被覆数) - (頂点数) + 2となるグラフを競争的タイトグラフとして定義し、それらの性質について調べた。また、グラフの競争数に対してこれまで知られていた上界よりも良い上界を与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

(1,2)-ステップ競争グラフの概念をもとに、グラフの(1,2)-ステップ競争数というグラフ不変量を新たに定義し、いくつかの基本的なグラフに対し、その数の正確な値を与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

多重グラフに対し、その二重多重競争数を新たに定義し、多重グラフの構造とその数の間の関係について調べた。また、その数に対する下界も与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

(2) グラフの辺集合の交叉グラフであるライン・グラフと関連して、その一般化である H-ライン・グラフとホフマン・グラフを用いて、隣接行列の最小固有値が下から抑えられたグラフ・クラスに関する研究を行い、以下の研究成果が得られた。

最小固有値が $-1 - \frac{1}{\text{fat}}$ = $-2.618\dots$ 以上の fat なホフマン・グラフについて、H-ライン・グラフとしての特徴づけを与えた。

(本結果は雑誌論文として出版された。)

2つの fat 隣接頂点を持つ slim 頂点を持つような最小固有値が-3 以上の fat な Hoffman グラフのスペシャル・グラフの構造の特徴づけを与えた。
(本結果は雑誌論文 として出版された。)

(3) 上記の他にもグラフ理論における問題について研究を行い、以下の研究成果が得られた。

無限グラフにおいて、その上のトラベル・グループと呼ばれる代数構造について研究を行い、無限グラフがトラベル・グループを持つために必要十分条件を与えた。これにより、Nebesky の未解決問題の1つを解決した。

(本結果は雑誌論文 として出版された。)

有限連結グラフ上の non-confusing なトラベル・グループについて、その構造を明らかにし、その個数をグラフの組合せ構造を用いて計算する公式を与えた。

(本結果は雑誌論文 として出版された。)

グラフのサイクル分解の問題について研究を行い、完全多部グラフにおけるグレガリアス・サイクルを既存の定義を自然な形で拡張し、長さの長いサイクルについてもグレガリアス・サイクルを定義できるようにした。またいくつかの場合に関して、サイクル分解可能であるための十分条件を与えた。

(本結果は雑誌論文 として出版された。)

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 13 件)

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, and Yoshio SANQ: Travel groupoids on infinite graphs, Czechoslovak Mathematical Journal, 査読有, Vol. 64, 2014, pp. 763-766.
DOI:10.1007/s10587-014-0130-9

Jeongmi PARK and Yoshio SANQ: The double multicompetition number of a multigraph, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, Vol. 8845, 2014, pp. 138-144.
DOI:10.1007/978-3-319-13287-7_12

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, and Yoshio SANQ: The non-confusing travel groupoids on a finite connected graph, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, Vol. 8845, 2014, pp. 14-17.
DOI:10.1007/978-3-319-13287-7_2

Akihiro MUNEMASA, Yoshio SANQ, and Tetsuji TANIGUCHI: Fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue greater than -3, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 176, 2014, pp. 78-88.

DOI:10.1016/j.dam.2014.01.008

Jeongmi PARK and Yoshio SANQ: The niche graphs of interval orders, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 査読有, Vol. 34, 2014, pp. 353-359.

DOI:10.7151/dmgt.1741

Suh-Ryung KIM, Jung Yeun LEE, Boram PARK, and Yoshio SANQ: The competition hypergraphs of doubly partial orders, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 165, 2014, pp. 185-191.

DOI:10.1016/j.dam.2012.05.024

Akihiro MUNEMASA, Yoshio SANQ, and Tetsuji TANIGUCHI: Fat Hoffman graphs with smallest eigenvalue at least -1, Ars Mathematica Contemporanea, 査読有, Vol. 7, 2014, pp. 247-262.
<http://amc-journal.eu/index.php/amc/article/view/287>

Kim A. S. FACTOR, Sarah K. MERZ, and Yoshio SANQ: The (1,2)-step competition number of a graph, Congressus Numerantium, 査読有, Vol. 215, 2013, pp. 153-161.

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, and Yoshio SANQ: Edge-disjoint decompositions of complete multipartite graphs into gregarious long cycles, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, Vol. 8296, 2013, pp. 57-63.

DOI:10.1007/978-3-642-45281-9_5

Suh-Ryung KIM, Jung Yeun LEE, Boram PARK, and Yoshio SANQ: Competitively tight graphs, Annals of Combinatorics, 査読有, Vol. 17, 2013, pp. 733-741.

DOI:10.1007/s00026-013-0207-4

Boram PARK and Yoshio SANQ: The phylogeny graphs of doubly partial orders, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 査読有, Vol. 33, 2013, pp. 657-664.

DOI:10.7151/dmgt.1701

Yoshio SANQ: A generalization of Opsut's lower bounds for the competition number of a graph, Graphs and Combinatorics, 査読有, Vol. 29, 2013, pp. 1543-1547.

DOI:10.1007/s00373-012-1188-5

Suh-Ryung KIM, Boram PARK, and Yoshio SANQ: The competition number of the

complement of a cycle, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 161, 2013, pp. 1755-1760.
DOI:10.1016/j.dam.2011.10.034

〔学会発表〕(計 15 件)

佐野良夫: "最小固有値を下から制限したグラフについて"、スペクトラルグラフ理論および周辺領域第3回研究集会、2015年03月13日-15日、広島工業大学(広島)

佐野良夫: "On gregarious group divisible designs"、研究集会「有限幾何と組合せデザイン」, 2015年03月06日-07日、東京理科大学(東京)

佐野良夫: "Combinatorial systems and travel groupoids on graphs"、2014年度応用数学合同研究集会、2014年12月18日-20日、龍谷大学(滋賀)

Yoshio SANO: "Travel groupoids on graphs"、Colloquium at Department of Mathematics, Pusan National University(招待講演) 2014年09月18日、Pusan National University(韓国)

佐野良夫: "グラフの固有値とグラフ構造"、都市のORサマーセミナー2014(招待講演) 2014年08月22日、筑波大学(茨城)

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, 佐野良夫: "The non-confusing travel groupoids on a finite connected graph"、日本数学会2014年度年会、2014年03月15日-18日、学習院大学(東京)

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, 佐野良夫: "Travel groupoids on infinite graphs"、日本数学会 2014年度年会、2014年03月15日-18日、学習院大学(東京)

佐野良夫: "線形マトロイドとマトロイド連結性"、第21回大阪組合せ論セミナー(招待講演) 2014年02月14日、大阪市立大学梅田サテライト文化交流センター(大阪)

Yoshio SANO: "Travel groupoids on graphs"、The 12th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics (KJ2014)、2014年01月23日-25日、KAIST(韓国)

佐野良夫: "グラフ上のトラベル・グループ

ポイドについて"、組合せ数学セミナー(招待講演) 2013年12月06日、東京大学(東京)

Yoshio SANO: "On intersection graphs associated with digraphs and posets"、25th Workshop on Topological Graph Theory (TGT25)、2013年11月18日-22日、Yokohama National University(神奈川)

佐野良夫: "Travel groupoids on graphs"、研究集会「組合せ論とその実験計画法への応用」, 2013年11月13日-15日、三愛高原ホテル(熊本)

Jung Rae CHO, Jeongmi PARK, and Yoshio SANO: "The number of travel groupoids on a finite graph"、The 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG² 2013)、2013年09月17日-19日、Tokyo University of Science(東京)

Jeongmi PARK and Yoshio SANO: "The double multicompetition number of a multigraph"、The 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG² 2013)、2013年09月17日-19日、Tokyo University of Science(東京)

Yoshio SANO: "The non-confusing travel groupoids on a finite connected graph"、Graph Theory Conference in honor of Yoshimi Egawa on the occasion of his 60th birthday、2013年09月10日-14日、Tokyo University of Science(東京)

〔その他〕
ホームページ等

<http://researchmap.jp/sano/>
<http://syous.cs.tsukuba.ac.jp/sano/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐野 良夫 (SANO, Yoshio)
筑波大学・システム情報系・助教
研究者番号: 20650261