

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540162

研究課題名(和文) 対数的ベクトル場と特異多様体の計算複素解析と代数解析アルゴリズム

研究課題名(英文) Computational Complex Analysis of logarithmic vector fields, singular varieties and Algebraic Analysis Algorithms

研究代表者

田島 慎一 (TAJIMA, Shinichi)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70155076

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：代数解析の観点から、孤立特異点を持つ超曲面の複素解析的諸性質の研究を行った。変形パラメータを含む半擬斉次孤立特異点を持つ超曲面族に対し、そのTjurina stratification, Tjurina数の変形パラメータ依存性、関連するイデアル商のstandard 基底等と求めるアルゴリズムを構成した。孤立特異点を持つ超曲面に対する Polar varietyや対数的ベクトル場について研究を行った。孤立特異点を持つ超曲面に対する対数的ベクトル場を構成する新たな計算法を得た。行列の固有ベクトル、広義固有ベクトル等をexactに求める効率的アルゴリズムを構成した。

研究成果の概要(英文)：Complex analytic properties of hypersurface isolated singularities are considered in the context of algebraic analysis. An algorithm is constructed for computing Tjurina stratifications, the parameter dependency of Tjurina numbers, standard bases of relevant ideal quotients of semi quasihomogeneous hypersurface isolated singularities with deformation parameters. Polar varieties and logarithmic vector fields associated with hypersurface isolated singularities are studied. A new effective method is obtained for computing logarithmic vector fields associated with hypersurface isolated singularities. Exact methods for computing generalized eigenvectors of given matrices are studied. An efficient method is constructed for computing annihilating polynomials of unit vectors. Efficient algorithms are constructed and also implemented in a computer algebra system for computing eigenvectors and also generalized eigenvectors.

研究分野：基礎解析学

キーワード：複素解析 代数解析 特異点 アルゴリズム

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 複素解析学には、代数解析の観点から研究することが適切と思われる現象や未解決問題が多く存在する。代数解析の理論や考え方に基づくことで、特異点の複素解析的諸性質を研究する新たな理論的枠組みや研究手法を構築することが求められていた。

(2) 与えられた正方行列に対し、その固有ベクトルや一般固有ベクトルを exact に求めることは様々な応用を持つ重要な問題であるが、計算効率の良い計算法が確立していなかった。本研究の研究代表者により、計算効率の良いアルゴリズムの開発を目指した研究がなされておりアルゴリズムの並列化を見込んだ本格的な研究が望まれていた。

## 2. 研究の目的

(1) 代数解析の理論と計算代数の手法を組み合わせ特異点の解析を行う新たな研究の枠組みを構築し、特異点の複素解析的諸性質を解析するアルゴリズムの研究・開発・応用を展開する。パラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いて、特異点変形とチュリナ数の関係、対数的ベクトル場の研究を進める。対数的ベクトル場を構成するアルゴリズムの研究開発、ホロノミーD-加群の研究を行う。

(2) 整数あるいは有理数を成分を持つ正方行列に対し、最小消去多項式を用いることで、広義固有ベクトル空間の構造を決定し、固有ベクトルおよび広義固有ベクトルを効率的に求めるアルゴリズム等を開発する。

## 3. 研究の方法

(1) 理論的な研究と計算機による計算実験を並行させながら特異点の研究、アルゴリズムの研究開発を行った。研究代表者・分担者が協力して、計算機実験のためのアルゴリズムの考案、プログラムの試作・改良を行い、研究用アルゴリズムを開発した。共同研究実施、関連分野の研究集会参加等のために研究旅費を使用した。

(2) 研究旅費を用いて研究分担者、協力者と研究連絡を重ね、広義固有ベクトル等を exact に求める効率的計算アルゴリズムの導出・実装を行った。

## 4. 研究成果

(1) generic に零次元となるパラメータを含むイデアルに付随するパラメータ付き局所コホモロジー類を求める計算法を構築した。擬斉次孤立特異点の変形として得られる半擬斉次孤立特異点族に対し、Tjurina 数の変形パラメータに関する依存の仕方を求める

計算法を確立した。変形パラメータ空間の Tjurina stratification, Tjurina algebra, 関連するイデアル商の standard 基底等の計算アルゴリズムを導出・実装した。Polar variety に関する研究を行い、半擬斉次孤立特異点を持つ超曲面に沿う対数的ベクトル場の構造を求める計算法を研究・実装した。ニュートン非退化な孤立特異点に付随して定義される局所コホモロジー類を求める計算法を研究し、基礎的結果を得た。局所コホモロジーを利用することで、standard 基底に対する項順序変換を効率的に行う新たな計算法を確立した。

(2) 正方行列に対する eigenproblem を exact に扱う新たな計算法を構築した。各基本ベクトルにたいする最少消去多項式候補を同時に求める並列算法を確立した。Horner 法を改良することで、行列多項式計算の効率化を行い、行列の固有ベクトル、広義固有ベクトル空間の構造、広義固有ベクトル等と効率的に求めるアルゴリズムを開発・実装し、さらにアルゴリズムの並列化を行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計35件)

K. Nabeshima and S. Tajima : On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 査読有 66 (2015), 143--159.

T. Shibuta and S. Tajima : An algorithm for computing the truncated annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有 8660 (2014), 449--461.

K. Nabeshima and S. Tajima : An algorithm for computing standard bases by change of ordering via algebraic local cohomology, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有 8592 (2014), 414--418.

K. Nabeshima and S. Tajima : An algorithm for computing Tjurina stratifications of  $\mu$ -constant deformations using algebraic local cohomology, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有, 8592, (2014), 523--530.

S. Tajima, K. Ohara and A. Terui : An extension and efficient calculation of the Horner's rule for matrices, *Lecture Notes*

in Computer Science, 査読有, 8592, (2014), 346--351.

K. Ohara, S. Tajima and A. Terui : Developing linear algebra packages on Risa/Asir for eigenproblems, Lecture Notes in Computer Science, 査読有 8592 (2014). 321--324.

K. Nabeshima and S. Tajima : On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases, ISSAC, 査読有, 2014, ACM, 351--358.

S. Tajima : Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for  $\mu$ -constant deformations of quasi-homogeneous singularities, in Several Topics on Real and Complex Singularities, 査読有, 2014, 189--200,

S. Tajima : On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 40, (2013), 41--51.

S. Tajima and Y. Nakamura : Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 48, (2012), 21-43.

〔学会発表〕(計62件)

大阿久俊則, 梅田陽子, 田島慎一 : Simple line singularities に付随する D-加群の局所コホモロジー解とモノドロミー, 日本数学会函数方程式分科会, 明治大学, 東京都 (2015年3月21日--24日)

田島慎一 : Whitney equisingularity, Teissier invariants  $\mu^{\{*\}}$  and local cohomology, Theoretical and Computational Aspects of Algebraic Analysis, 日本大学理工学部, 東京都(2015年3月6日--7日)

加藤満生, 田島慎一 : 孤立特異点の  $\mu$ -constant deformation と  $f^s$  の偏微分作用素環における annihilators の計算法について, 超幾何方程式研究会, 神戸大学, 兵庫

県神戸市 (2015年1月5日--7日)

鍋島克輔, 田島慎一 : 代数的局所コホモロジーを用いたパラメータ付き拡張 ideal membership 判定アルゴリズム, 数式処理とその周辺分野の研究, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市 (2014年12月24--26日)

小原功任, 田島慎一 : 最小消去多項式を用いた一般固有ベクトル空間の基底計算法, 数式処理とその周辺分野の研究, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市 (2014年12月24--26日)

田島慎一, 梅田陽子, On the monodromy structure of holonomic D-modules associated with simple line singularities, 超局所解析の諸相, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市 (2014年10月20--24日)

S. Tajima and Y. Umeta, Newton filtration and local cohomology, The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, Hokkaido Univ, Hokkaido, Japan (2014年8月25日--29日)

S. Tajima and T. Oaku, Introduction to b-functions, Computational Algebraic Statistics, Theories and Applications 2014, Kyoto Terra, Kyoto (2014年1月22日)

K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of Tjurina stratification using algebraic local cohomology classes associated with semiquasihomogeneous singularities, Asian Mathematical Conference 2013, Busan, Korea (2013年7月4日)

K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, The Tenth Asian Symposium on Computer Mathematics, Beijing, China (2012年10月26日)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計0件)

取得状況 (計0件)

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田島 慎一 (TAJIMA, Shinichi)  
筑波大学・数理物質系・教授  
研究者番号：70155076

### (2) 研究分担者

小原功任 (OHARA, Katsuyoshi)  
金沢大学・数物科学系・准教授  
研究者番号：00313635

鍋島克輔 (NABESHIMA, Katsusuke)  
徳島大学・ソシオアーツ・アンド・サイエ  
ンス研究部・准教授  
研究者番号：00572629

中村弥生 (NAKAMURA, Yayoi)  
近畿大学・理工学部・准教授  
研究者番号：60388494

### (3) 連携研究者

大阿久俊則 (OAKU, Toshinori)  
東京女子大学・現代教養学部・教授  
研究者番号：60152039