高校における集合と写像の
指　導　に　つ　い　て

数学科教官共同研究

報告者　喜　多　耕　作

「集合の考え」が数学の基礎を理解するに欠くことのできないものであるということから，集合を一つの柱としての数学教育の内容が再構成され，一層系統立った，すっきりとしたものにされようとしている。

しかし，このような数学教育の内容の再編成は，云うまでもなく，はば広い研究と実験を重ね，充分な時間をかけて慎重に行なわれるべきであり，しかも小，中，高を通じて一貫した系統立ったものに編成されるべきである。そこで，現実に今，高校生に数学を教えている私達としては，たとえそれが不充分な暫定的なものであっても，取り入れられるものから少しでも早く「集合の考え」を現行の高校数学に取り入れていくことが必要であると考える。

このような立場から，私達は，「現在の高校のレベルにおいて，集合および写像を現行教材の中にどのように生かすか。」ということについて研究することにした。

研究を進めるに当って，先づ問題となったことは，集合と写像とを，①どの程度，どの範囲まで取り入れるか。②どの段階で，どのような形で取り入れるか，ということであったが，①については，現行の教材内容の理解を深めるために必要な程度にとどめ，できるだけ範囲を広げないようにした。すなわち，集合については，論証が正しく行なえるようになることに目標を置き，直積，巾集合，無限集合，濃度，その他，所謂集合論的なものに深入りしないこととし，写像についても，関数概念を正しく理解できることを目標として，1対1対応と逆写像に重点を置き，ごく基本的なものに限った。

②については，数Ⅰの最初の章で集合を系統的に学習したあとで，必要に応じて後章の数と式の取扱いに集合の考えをできるだけ生かすようにし，写像も，関数とグラフを学習する前にまとめて学習し，既習の式の変形や方程式の解法における同値関係を写像の観点からも見直させるとともに，後章の関数関係の学習にも充分生かせるようにした。

以上のような観点から，さし当って高一数学の指導計画と時間配当とを下のようにまとめた。「式の計算」では，出来るだけ中学との重複をさけ，また，「方程式と不等式」や「図形と方程式」では，単に解くための技巧に走らないようにして，内容を整理し，出来るだけ基本的なものにしぼって取扱うことによって，集合と写像にそれぞれ15時間づつ配当したものである。

第一章	集　合	15時間	
第二章	式の計算	20 〃	
第三章	方程式と不等式	40 〃	
第四章	写　像	15 〃	
第五章	関数とグラフ	35 〃	
第六章	図形と方程式	35 〃	
第七章	空間図形	15 〃	計 175時間

第一章　集　合

〔目　標〕　(1)　数学の構造，数の構成についての正しい理解を与える。
　　　　　　(2)　論理的に思考し，推論する能力を伸ばす。

第一節　集　合

§1.　集　合

〔ねらい〕　集合の意味，表記法の理解をさせ，数学の対象をできるだけ集合という形で考えられるようにし，集合の約束を使ってその内容を説明できるようにする。

〔内容〕 1.　集合の定義「ある条件を満足しているものの集まりを集合といい，集まっている個々のものを集合の元という。」

(1) 集合を表わす文字　大文字 A, B, C………　(2) 元を表わす文字　小文字 a, b, c………

(3) 集合の表わし方　① $A=\{a, b, c\}$　② $A=\{x|\ x+1>0\}$

2.　いろいろな集合

(1) 有限集合　(2) 無限集合　(3) 空集合　（集合の元の個数により集合の種別を考える。）

3.　集合の元の関係

(1) aはAの元である。（aはAに属する。）………$A=\{a, b, c\}$ のとき $a\in A$
　pはAの元でない。（pはAに属しない。）……$A=\{a, b, c\}$ のとき $p\notin A$

(2) 等しい集合「２つの集合で，元がすべて同じであるとき，２つの集合は等しいという。」
　（注意）元の並び方には関係なく，元がすべて同じであることをいう。

〔用語〕　集合，元，有限集合，無限集合，空集合，属する，属しない

〔記号〕　{ }，Φ，$\in$，$\notin$，$=$

§2.　部分集合

〔ねらい〕　部合集合の意味を理解させながら，全体集合の中における集合ということに注意を向けさせ，補集合も考えさせ，集合についてのより深い理解を得させるようにする。

〔内容〕 1.　部分集合の定義「２つの集合AとBがあり，Aの元がすべてBの元であるとき，AはBの部分集合という。」　$A\subseteqq B$

2.　真部分集合「AがBの部分集合で，Bの元の中にAの元でないものがあるときAはBの真部分集合という。」　$A\subset B$

3.　補集合は，全体集合と関連してとり上げる。

4.　べき集合，部分集合の集合についてもかるくふれる。

〔用語〕　部分集合，真部分集合，補集合，全体集合

〔記号〕　$\subseteqq$，$\subset$，$\bar{A}$

§3.　集合についての演算

〔ねらい〕　和集合，積集合の意味とその関係の理解，集合についての基本的演算の理解などをさせると共に，集合についての抽象的な取扱いになれさせるようにする。

〔内容〕 1. 和集合「2つの集合A，Bの少なくとも一方の集合に属する元の集合を集合A，Bの和集合という。」 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$

（注意）またはの意味について特に注意する。

2. 積集合「2つの集合A，Bの両方に属する元の集合を，集合A，Bの積集合という。」
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$

3. 集合についての演算規則

(1) 交換法則 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(2) 結合法則 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配法則 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(4) ドゥーモルガンの法則 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

4. 集合の元の個数（集合の大きさ）

(1) n(A)の記号を与え，集合の大きさについての計算的取扱いを指導する。
例えば $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) 無限集合の濃度：有限集合の元の数の取扱いに対して，無限集合では元の数についてどんなことが考えられるか，集合の元の対応のつけ方などを中心に濃度の等しい可附番集合を中心として，軽く濃度の問題にもふれておく。

〔用語〕 和集合，積集合，交換法則，結合法則，分配法則，ドゥーモルガンの法則

〔記号〕 ∪，∩，n(A)

第二節　推論と集合

§1. 命　　題

〔ねらい〕 (1) 命題の構造を理解させ，条件（仮定）と結論の分析ができるようにする。

(2) 数学で推論のために使う独特の言葉，使い方を理解させる。

〔内容〕 1. 命題の構成

「AならばBである。」「AはBである。」の形の命題は，内容的には，① 場面設定 ② 仮定 ③ 結論　にわけられる。

（例）二等辺三角形の底角は等しい。

① 三角形について， ② 二辺が等しいならば， ③ その底角は等しい。

と三部分にわけられる。

2. いろいろな命題

(1) 逆，裏，対偶を作る。 (2) 仮定と結論の分析をする。

3. 推論に用いる言葉

(1) 「AまたはB」，「AかつB」の意味

(2) 「……でない」には全部否定と一部否定があること。

（注意） ① 学習例は，幾何の定理，代数の法則に限ることなく，数学内容を離れた一般問題も含め，かたよらないようにする。

② ここでは集合とは無関係に学習する。

〔用語〕 命題，逆，裏，対偶，仮定，結論

§2. 命題と集合

〔ねらい〕 (1) 命題を集合を使って表わし，また，集合（または集合的関係）を命題として読み取

ることができるようにする。

(2) 数学的三法則，定理等を集合を使って表わせるようにする。

〔内容〕 1.　命題と集合との結び付け方

① a∈A……………………………………………………… aが条件Aを満足する

② A⊂B………（a∈Aならば，a∈Bである）………条件Aならば条件Bである

③ a∈(A∪B)………………………………………………… aは条件Aまたは条件Bを満足する

④ a∈(A∩B)………………………………………………… aは条件Aも条件Bも満足する

⑤ a∈$\bar{A}$……………………………………………………… aは条件Aを満足しない

（註） 集合Aとは集合所属条件がAであるような集合とする。

2.　上の結び付け方により，命題⇄集合への移行をする。

（例） 命題　aは3より大きい　　　　　　集合　a∈{x| x>3}

命題　2でも割り切れ3でも割り切れる数は6で割り切れる　　集合　x∈{2の倍数}∩{3の倍数}ならばx∈{6の倍数}である

§3.　必要条件，十分条件

〔ねらい〕 (1) 集合を使って推論するときにあらわれる包含関係と必要条件，十分条件との関連を理解する。

(2) 同値の意味を理解する。

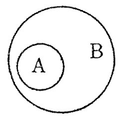
(3) 完全な包含関係がない場合の推論の仕方を明らかにする。

(4) 数学的推論の実際について両条件の意味を理解する。

〔内容〕 1.　AならばBである

このとき，AはBとなるための十分条件，

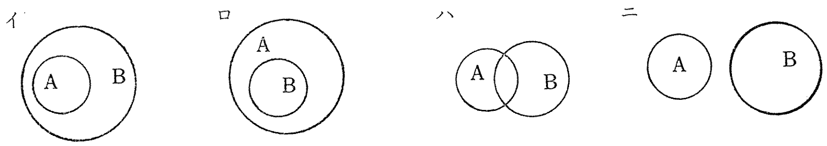
BはAとなるための必要条件



2.　AならばB（A⊆B），かつ，BならばA（A⊇B），

このとき，AとBとは一致（A＝B）必要十分条件という，したがって同値。

3.　集合AとBが包含される関係にない場合もある。集合AとBの関係を図示すると次のようになる（但しAとBが一致する場合を除く）



イ．Aならば（すべて）Bである　ハ．AならばBとなることもある（Bでないこともある）

ロ．BならばAである　　　　　　ニ．AならばBでない

〔用語〕 必要条件，十分条件，必要十分条件，同値

§4.　推 論 の 形 式

〔ねらい〕 (1) 集合の包含関係によって推論を進める方法を知る。

(2) 種々の推論形式と集合との関係を考え，その意味を明らかにする。

(3) 一つの命題から他の命題形式に移行する場合に，その真偽を正しく判断する。

〔内容〕 1.　直接証明，a∈A，A<B より a∈B を推論する。

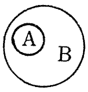
2.　合成命題の証明，「A→B，B→C のとき A→C」を証明するには，

「$a \in A$, $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ より $a \in C$ を得る」の形式で推論をすすめる。

3. 対偶による証明法

一つの命題 $A \to B$ から作られた 逆$B \to A$, 裏 $A' \to B'$, 対偶 $B' \to A'$ とその真偽, (A', B' はそれぞれ A, B の否定)

$A \to B$,



から集合の包含関係を考えて（証明には補集合 $\bar{A}$, $\bar{B}$ を利用する）

- 逆 $B \to A$ は偽
- 裏 $A' \to B'$ は偽
- 対偶 $B' \to A'$ は真が推論される。

4. 背理法：集合を使って意味を明らかにすることができる。

〔用語〕 直接証明，間接証明，命題の真偽，背理法

集合の適用例

1. 数の分類

M_0：自然数全体の集合，M_0 に対して，たとえば $x+3=2$ なる x は $x \notin M_0$……負の整数導入。

M'_0：負の整数全体の集合，M_1：整数全体の集合，$M_0 \cup \{0\} \cup M'_0 = M_1$, M_1 に対して，たとえば $2x=3$ なるxは $x \notin M_1$……分数導入。

M'_1：分数全体の集合，M_2：有理数全体の集合，$M_1 \cup M'_1 = M_2$

この M_2 に対して，たとえば $x^2=2$ なる x, $x \notin M_2$ が存在する。……無理数導入

M'_2：無理数全体の集合，M_3：実数全体の集合，$M_2 \cup M'_2 = M_3$

M_3 に対して，たとえば $x^2+3=0$ なるxについて，$x \notin M_3$……虚数導入

M'_3：虚数全体の集合，M_4：複素数全体の集合，$M_3 \cup M'_3 = M_4$

$a, b \in M_0$ ならば $a+b \in M_0$　$a \cdot b \in M_0$: $a, b \in M_1$ ならば $a \pm b \in M_1$, $a \cdot b \in M_1$

$a, b \in M_2$（あるいは M_3 あるいは M_4）ならば $a \pm b \in M_2$ (M_3, M_4)

$a \cdot b \in M_2$ (M_3, M_4) $\frac{a}{b} \in M_2$ (M_3, M_4), ($b \neq 0$)

すなわち，M_3, M_3, M_4 においては，0で割ることを除いて四則の計算ができるようになる。

$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset M_4$

〔用語〕 自然数，整数，分数，有理数，無理数，実数，虚数，複素数

2. 数と式の計算

整式の計算，式の分類

整式の文字は，すべて M_4 の任意の元を代表していると考えてよい。したがって整式（単項式，多項式）の計算，指数法則，乗法公式，因数分解などは，M_4 の元についての計算である。

整式・分数式・無理式……文字は，一般に数を表わすから，これらの式について，各々，整数・分数・無理数に関するいろいろな性質は，そのまま成り立つ，つまり，式も数と同様に取り扱える。

3. 命　　題

二次方程式を題材とした例題

「実系数の二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において a と c の符号が異なるときは，この方程式は必ず実根をもつ。」

（解） $A=\{x \mid ax^2+bx+c=0,\ ac<0\}$, $M_3=\{x \mid x は実数\}$ として $x \in A$ ならば $x \in M_3$ つまり $A \subset M_3$ をいえばよい。

「$p+q_i$ が実系数の二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根であれば $p-q_i$ もこの二次方程式の根である。」

（解） $A=\{x \mid ax^2+bx+c=0\}$ について $p+q_i \in A$ ならば $p-q_i \in A$ をいえばよい。

4. 方程式と恒等式

方程式，恒等式，連立方程式

方程式 $f(x)=0$ を解く $\Longleftrightarrow$ 集合 $\{x \mid f(x)=0\}$ を求める。

$P(x)=0$ が恒等式 : $\Longleftrightarrow$ $\{x \mid P(x)=0\}=M_3$（実数全体の集合）

連立方程式 : $f(x, y, \cdots\cdots)=0$, $g(x, y, \cdots\cdots)=0$, $\cdots\cdots \Longleftrightarrow$ $\{(x, y, \cdots\cdots) \mid f(x, y, \cdots\cdots)=0\} \cap \{(x, y, \cdots\cdots) \mid g(x, y, \cdots\cdots)=0\} \cap \cdots\cdots \cap \cdots\cdots$ なる集合を求めること。

5. 方程式の同値

分数方程式，無理方程式

〔例〕 $\sqrt{x+2}=x$ を解け。

（解） 方程式	解の集合
$\sqrt{x+2}=x$ …………………	…………$A=\{x \mid \sqrt{x+2}=x\}$
$\downarrow$	
$x+2=x^2$ …………………	……$A \cup A'$……$A'=\{x \mid \sqrt{X+2}=-x\}$
$\downarrow\uparrow$	
$x=-1,\ 2$ …………	……$2 \in A$, $-1 \in A'$

6. 不 等 式

(1) 大小関係の公理

集合 M_3 についての考察

Ⅰ. $M_3 \ni a, b$ に対して $a>b$, $a=b$, $a<b$ のうちどれか一つだけが成立する。

Ⅱ. $a>b$, $b>c$ ならば $a>c$

Ⅲ. $a>b$ ならば $M_3 \ni C$ に対して，$a+c>b+c$

$c>o$, $a>b$ ならば $ac>bc$

(2) 不等式，連立不等式

不等式 $f(x)>o$ を解く $\Longleftrightarrow$ $\{x \mid f(x)>o\}$ なる集合を求める。

連立不等式 $f(x)>o$, $g(x)>o$……を解く。

$\Longleftrightarrow$ $\{x \mid f(x)>o\} \cap \{x \mid g(x)>o\} \cap$……なる集合を求めること。

(3) 絶対不等式

$A(x)>o$ が絶対不等式 $\Longleftrightarrow$ $\{x \mid A(x)>o\}=M_3$

7. 図形と方程式

〔例〕 直線 : 集合 $M=\{P(x, y) \mid ax+by+c=o.\ a, b, c$ は定数$\}$

8. 軌跡と方程式

ある条件Cに適する点Pの軌跡が図形Fである。$\Longleftrightarrow$ $M=\{P(x, y) \mid P$ は条件を満す$\}$, $N=\{P(x, y) \mid P$ は図形F上にある。$\}$ について，$M \subseteqq N$ および $M \supseteqq N$，つまり $M=N$ を示す。

9. 不等式と領域

〔例〕 $y>x^2$ の表わす領域 : 集合 $M=\{P(x, y) \mid y>x^2\}$

$x^2+y^2 \leqq r^2$ $(r>o)$ の表わす領域 : 集合 $M=\{P(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq r^2\}$

第二章　写　　像

〔目標〕

(1) 関数を写像（操作）として理解させるとともに，量と量（数と数）の対応関係をとらえさせ，関数の取り扱いが正しく出来るようにする。

(2) 式の変形や方程式の解法が同値関係を考えながら，正しく行なえるようにする。

第一節　写　　像

〔ねらい〕

(1) 既習の簡単な関数（正比例関係，一次関数，二次関数等）を写像として見なおし理解させる。

(2) ブラックボックスを用いて写像の考え方を理解させる。

(3) 定義域，値域を明確にさせる。

〔内容〕

§1.　写像の定義

「ある集合に属する任意の元を，一つの文字で代表させるとき，この文字を変数といい，その集合を，この変数の変域という。」

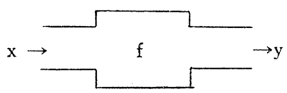
「ある集合Xのおのおのの元xを一定の規則でそれぞれ他の集合Yの一つの元yにうつすとき，このうつす規則を Xから Yへの写像 という。」

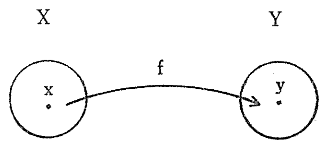
そして，この規則をfで表わし，XからYへの写像を

$f: X \longrightarrow Y$，または，$X \xrightarrow{f} Y$ と表わす。

（注）fのかわりに，g, hなどの文字も用いられる。

ブラックボックス





「集合Xをfの定義域，集合Yをfの終域という。」

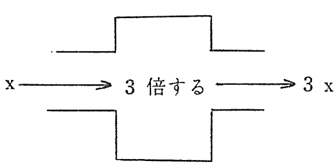
「終域Yの元yのうち，xがfによってうつったものを$f(x)$と表わし，fによるxの像という。」なお，xの値をきめれば像yの値が規則fによって$f(x)$に等しく定まるから，このことを式で $y=f(x)$ と表わし，yをxの関数という。

「定義域Xに属するxの像 $f(x)$ の集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$ を $f(X)$ とかき，これをfの値域という。」$f(X) \subseteq X$ である。

§2.　式　の　考　察

〔例〕1.　$y=3x$

(1) ブラックボックスの説明



(2) 文字 x の意味……独立変数，（$x \in X$），変域Xはこの場合は実数の集合Rとなる。

(3) f の働き…………３倍する。

(4) 文字 y の意味……従属変数（$y \in Y$），値域 $f(X)$ もこの場合は実数の集合Rとなる。

$(f(X)=Y)$

(5) 関数 $y=3x$ の式表示の意味と，関数値 $f(x)$，$f(2)$ の内容。……

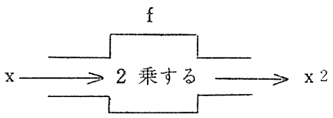
$y=f(x)$，$f(x)=3x$

したがって，$y=f(x)=3x$，または単に $y=3x$ とかける。

また，$f(2)=6$ 等。

〔例〕 2.　$y=x^2$

(1) ブラックボックスによる説明

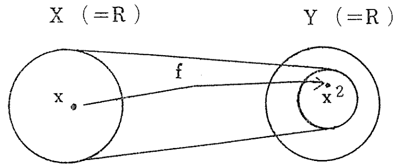


(2) 定義域 $X=R$（実数の集合）

値域 $f(X)=\{y \mid y \geqq o\} \subset Y$

$Y=R$

（値域がRの部分集合になることに注意）



§ 3.　量の考察（変化の割合）

〔例〕 1.　$y=3x$

(1) $x_1, x_2 \in X$，　$x_1 \neq x_2$，　$y_1=f(x_1)$，　$y_2=f(x_2)$，　$y_1, y_2 \in Y$ のとき

$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=3x_2-3x_1=3(x_2-x_1)$$

$$\therefore \quad \text{平均変化率}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=3 \quad \text{（一定）}$$

もっと具体的に，x が１だけ増えると，$f(x)$ の増加は

$$f(x+1)-f(x)=3(x+1)-3x=3 \quad \text{（x の値にかかわらず一定）}$$

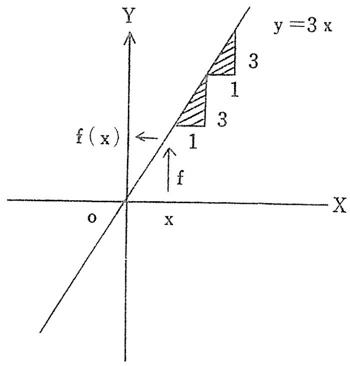
また，　$f(x_1+x_2)=3(x_1+x_2)=3x_1+3x_2=f(x_1)+f(x_2)$

$f(2x_1)=3(2x_1)=2(3x_1)=2f(x_1)$

一般に $f(kx_1)=kf(x_1)$ すなわち，x が k 倍になれば，y も k 倍になる。

(2) 従来のように $y=3x$ のグラフをかかせ，グラフの存在する範囲から直感的に，x の定義域XをRとすれば，y の値域YもRになることをつかませる。

また，平均変化率一定についても確かめさせる。



〔備考〕 以上の指導を，　$y=\frac{1}{2}x$，$y=-2x$ 等についても行ない，$y=ax\,(a \neq o)$ についてまとめる。

$y=x+b\,(b \neq o)$ についても同様に指導する。ただし，この関数では，$f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2)$，$f(kx_1) \neq kf(x_1)$ に注意する。ま

た，関数について“定数を加える”という操作は，グラフにおいて，“y軸方向に平行移動する”ことに対応していることに注意する。

〔例〕 $y=x^2$

(1) $x_1,\ x_2\in X,\ x_1\neq x_2,\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ y_1,\ y_2\in Y$ とする。

$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)=x^2{}_2-x^2{}_1=(x_2+x_1)\ (x_2-x_1)$

$\therefore\ \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=x_2+x_1$ （一定ではない。）

具体的に，xが1だけ増えると，$f(x)$ の増加は，

$f(x+1)-f(x)=(x+1)^2-x^2=2x+1$ となり，xによって変わる。（xの値が大きくなるほど $f(x)$ の増加の割合は大きくなる。）

また，$f(x_1\cdot x_2)=(x_1\cdot x_2)^2=x^2{}_1\cdot x^2{}_2=f(x_1)\cdot f(x_2)$（乗法は乗法にうつる。）

（注意） $f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)$ （非線形）

(2) グラフによる考察

$y=ax$ の場合と同じ方法で指導する。

〔用語・記号〕

変数，変域，写像，定義域，終域，像，値域，関数値，f，$f(x)$，$f(X)$，平均変化率

第二節　合成写像

〔ねらい〕

(1) 一般の一次関数 $y=ax+b$ と，二次関数 $y=a(x-p)^2+q$ を合成写像として取り扱うことによって，合成写像の意味を理解させる。

(2) 合成する1つ1つの写像の定義域と値域を明確にすることによって合成写像 $y=ax+b$ や，$y=a(x-p)^2+q$ の値域を明確にする。

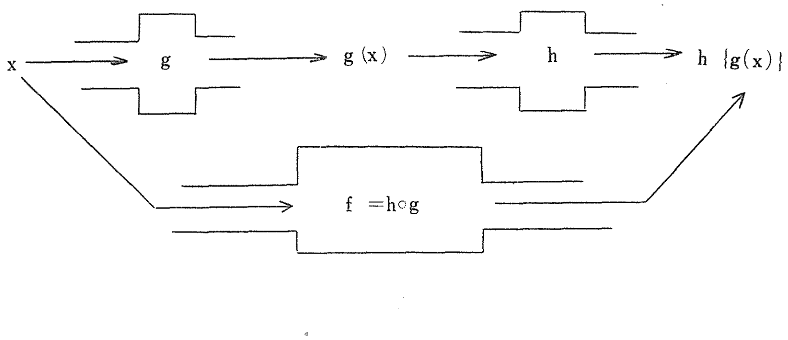
〔内容〕

§ 1.　一次関数の合成

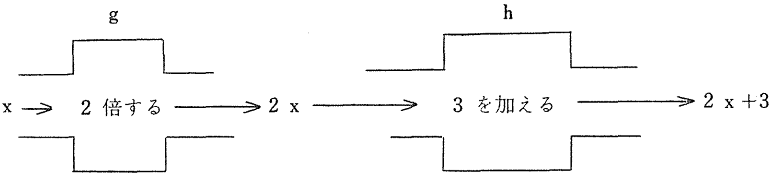
写像g：X→Yと写像h：Y→Zが写えられたとする。このとき，Xの元xは，gによってYの元 $y=g(x)$ にうつり，このyは，さらにhによって，Zの元 $z=h(y)=h\{g(x)\}$ にうつる。

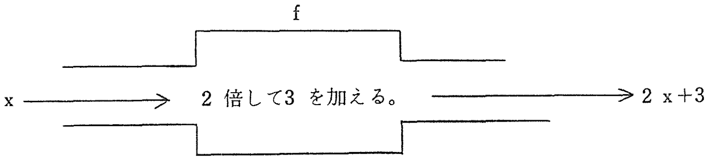
したがってここに，Xのおのおのの元xをZの元zにうつす1つの規則（これをfとする）が与えられたと見ることができる。この写像fをgとhの合成写像といい，$h\circ g$ で表わす。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f=h\circ g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$



〔例〕 $y=f(x)=2x+3$



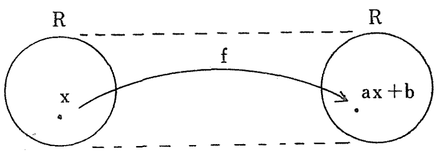


$g(x)=2x$，$h(x)=x+3$　である２つの写像に対して，合成写像 $f=h\circ g$ を考えると，$f(x)=h\circ g(x)=h(2x)=2x+3$ となる。

一般の一次関数 $f(x)=ax+b$ は，$g(x)=ax$ と $h(x)=x+b$ の合成写像 $f=h\circ g$ と考えられる。このとき，gの定義域を実数の集合Rとすれば，gによる像axの値域もRとなり，これが，すなわちhの定義域となるから，axのhによる像 $ax+b$ の値域もまた，Rとなる。したがって f の定義域も値域もRとなる。このことから，次のことがいえる。

<u>一次関数は，実数の集合Rから実数の集合Rへの写像である。</u>

$f:R\to R$，$f(x)=ax+b$



〔注意〕 $g(x)=2x$，$h(x)=x+3$ において，$h\circ g(x)=2x+3$ であったが，

$g\circ h(x)=g(x+3)=2(x+3)=2x+6$

よって $h\circ g\neq g\circ h$ である。

〔問〕 次の２つの写像 g と h について，その合成写像 $g\circ h$ および $h\circ g$ を求めよ。

(1) $g(x)=2x$，$h(x)=3x$

(2) $g(x)=\frac{1}{2}x$，$h(x)=2x+1$

$g(x)=2x+1$，$h(x)=-3x+2$

$g(x)=3x+2$，$h(x)=4x+3$

§ 2.　二次関数の合成

〔例〕 1.　$y=f(x)=2x^2$

$g(x)=x^2$，$h(x)=2x$ の合成写像 $f=h\circ g$ として取り扱う。

f の定義域XはR，値域 $f(X)$ は $\{y\mid y\geqq 0\}\subset R$ となる。

〔例〕 2.　$y=f(x)=-3x^2$

上例と同様に取り扱い，定義域XはR，値域 $f(x)$ は $\{y\mid y\leqq 0\}\subset R$ である。

〔例〕 3.　$y=f(x)=x^2+1$

$g(x)=x^2$ に $h(x)=x+1$ を合成。値域は $\{y\mid y\geqq 1\}\subset R$

〔例〕 4.　$y=f(x)=3x^2-1$

$g(x)=x^2$,　$h(x)=3x$,　$k(x)=x-1$ とすると,

$f=k\circ h\circ g=k(h\circ g)=(k\circ h)g$, 値域は $\{y \mid y\geqq -1\}\subset R$

〔例〕 5.　$y=f(x)=3(x-1)^2$

上例の g, h, k で, $f=h\circ g\circ k$,　値域は $\{y \mid y\geqq o\}\subset R$

（注意） 例4と例5の違いに注意する。

〔例〕 6.　$y=h(x)=3(x-1)^2+2$

例5の f に $g(x)=x+2$ を合成する。値域は $\{y \mid y\geqq 2\}\subset R$

〔用語・記号〕

合成写像,　$f=h\circ g$,

第三節　1対1対応

〔ねらい〕

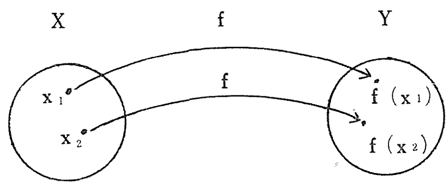
(1) 対応が1対1である場合と，1対1でない場合とを，一次関数と二次関数とを用いて理解させる。

(2) 値域と終域との関係を理解させる。

〔内容〕

§1.　1対1写像

「$f: X\to Y$ において，X の異なる元に対して，それらの像も異なるとき，すなわち，$x_1\neq x_2 \longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,（$x_1, x_2\in X$, $f(x_1)$, $f(x_2)\in Y$）のとき，f をXからYへの1対1写像という。」



〔例〕 具体的ないろいろな一次関数について考察（省略）

一次関数, $f: R\to R$, $y=f(x)=ax+b$ $(a\neq o)$ においては,

$f(x_1)-f(x_2)=(ax_1+b)-(ax_2+b)=ax_1-ax_2=a(x_1-x_2)$

よって, $x_1\neq x_2 \longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

したがって一次関数はRからRへの1対1写像である。

〔例〕 $f: R\to R$, $y=f(x)=x^2$ について

$f(x_1)-f(x_2)=x^2{}_1-x^2{}_2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

よって $x_1+x_2=o$ なる x_1, x_2 に対しては, $x_1\neq x_2$ であっても $f(x_1)=f(x_2)$（例えば, $f(-2)=4$, $f(2)=4$）したがって，この写像 f は1対1写像ではない。

〔例〕 いろいろな具体的な二次関数について考察する（省略）

次に一次関数と二次関数との写像としての違いについて考えてみる。

二次関数 $f: R\to R$, $y=f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq o)$ においては,

$f(x_1)-f(x_2)=a\{(x_1+x_2)+\frac{b}{a}\}(x_1-x_2)$

よって $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ なる x_1, x_2 に対しては, $x_1\neq x_2$ であっても $f(x_1)=f(x_2)$

したがって，二次関数はRからRへの1対1写像でない。

（注意） $f(x)=x^2$ で，定義域を $\{x \mid x \geqq o\}$ に制限すれば，f は1対1写像となる。このように，写像の種類（性質）は常に定義域（および終域）と密接に関連している。以下ことわりのないときは，関数の定義域も終域もRで考える。

写像 $f:X \to Y$ によって，Yの一つの元 y_1 にうつるXの元の集合を y_1 の原像といい，$f^{-1}(y_1)$ で表わす。すなわち，

$f^{-1}(y)=\{x \mid x \in X,\ f(x)=y_1\}$

（注意） Yの部分集合 Y_1 の元の原像の集合を $f^{-1}(Y_1)$ と表わすこともある。特に，Y_1 が値域であれば $f^{-1}(Y_1)$ は定義域となる。

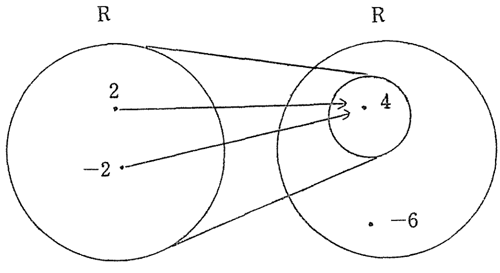
〔例〕 $y=f(x)=3x$ においては，$f(2)=6$ で，また，$f(x)=6$ となるのは，$x=2$ のみであるから，$f^{-1}(6)=\{2\}$……ただ1つの元からなる集合。

〔例〕 $y=f(x)=x^2$ においては，$f(2)=4$，$f(-2)=4$ で，かつ，$f(x)=4$ となるのは，$x=2$ と $x=-2$ のみであるから

$f^{-1}(4)=\{2,\ -2\}$

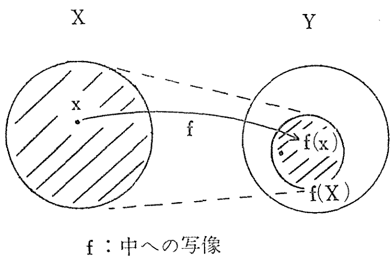
なお，

$f^{-1}(-6)=\Phi$ （空集合）

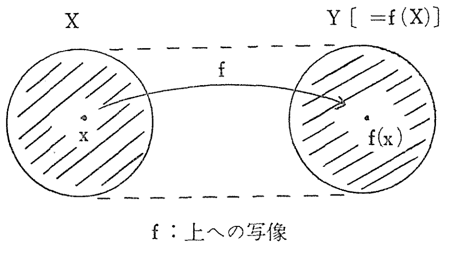


§2. 中への写像，上への写像

「写像 $f:X \to Y$ において，値域 $f(X)$ が終域Yの真部分集合であるとき，すなわち，$f(X) \subset Y$ のとき，写像 f を，XからYの中への写像といい，値域が終域と一致するとき，すなわち，$f(X)=Y$ のとき，写像 f をXからYの上への写像という。」



f：中への写像



f：上への写像

〔例〕 1. $f:X \to Y$，$f(x)=3x$ において，$X=Y=R$ にとれば，$f(X)=R=Y$ となるから，この写像 f は，RからRの上への写像である。

一般に，一次関数は，RからRの上への写像である。

〔例〕 2. $f:X \to Y$，$f(x)=x^2$ において，$X=Y=R$ にとれば，

$f(X)=\{y \mid y \geqq o,\ y \in R\} \subset R$ となるから，この写像 f は，RからRの中への写像である。

（注意） ただし，$X=R$，$Y=\{y \mid y \geqq o,\ y \in R\}$ ととれば，f はXからYの上への写像となる。

一般に，二次関数は，RからRの中への写像である。

§3.　1 対 1 対 応

「写像 $f: X \to Y$ が，Xから Yへの1対1写像で，しかも，XからYの上への写像となるとき，写像fをXからYへの1対1対応という。」

前述のことから，一次関数はRからRへの1対1対応である。

〔問〕(1) $f: R \to R$，$f(x)=x^2$ は1対1対応か。

$f: R \to R$，$f(x)=2x$ ではどうか。また，一般の二次関数はどうか。

(2) $f: R \to R$，$f(x)=x^3$ は1対1対応か。$f(x)=-2x^3$ ではどうか。

(3) $f: R \to R$，$f(x)=-3x^2$ は1対1対応ではない。何故か。また，定義域をどのように制限すれば，1対1対応となるか。

〔用語・記号〕

1対1写像，原像，中への写像，1対1対応

第四節　逆　写　像

〔ねらい〕

(1) 逆写像の意味を理解させる。

(2) 逆写像を用いて同値関係の理解を深めさせる。

(3) 根号の意味を写像の立場から理解させ，あわせて，指数法則の理解を深めさせる。

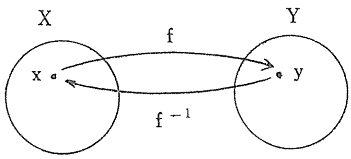
〔内容〕

§1.　逆　写　像

「写像 $f: X \to Y$ が，XからYへの1対1対応であるとき，Yのいかなる元y_1に対してもその原像 $f^{-1}(y_1)$ が，ただ1つ存在するから，y_1 を $f^{-1}(y_1)$ にうす1つの写像が考えられる。この写像をfの逆写像といい，$f^{-1}: Y \to X$ であらわす。

定義より　逆写像はまた　1対1対応である。

また，一次関数は，RからRへの，1対1対応であるから，その逆写像は，存在する。



〔例〕 1.　$f: R \to R$，$f(x)=2x$ では

$f^{-1}: R \to R$，$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$ である。

（f：2倍する，f^{-1}：2で割る。逆「操作」を考えればよい。）

〔例〕 2.　$f: R \to R$，$f(x)=2x-3$ では，$f^{-1}: R \to R$，$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+3)$ である。

（f：2倍して3を引く，f^{-1}：3を加えて2で割る）

（注意） g：2倍する，h：3 を引くとすれば，$f=h \circ g$ であり，その逆写像 f' は，h^{-1}：3を加える，g^{-1}：2 で割る，だから $f^{-1}=g^{-1} \circ h^{-1}$ である。そして $f^{-1}=(f)^{-1}=(h \circ g)^{-1}$ とかけるから，一般に $(h \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ h^{-1}$ となる。ただし，g も h も1対1対応である。（合成写像の逆写像の求め方）

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[rr, bend left, "f=h\circ g"] & Y \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[r, shift left, "h"] & Z \arrow[l, shift left, "h^{-1}"] \arrow[ll, bend left, "f^{-1}=g^{-1}\circ h^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

一般に，写像 $f: R \to R$，$f(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$ の逆写像は，$y=ax+b$ をxについて解い

て，$x=\frac{1}{a}(y-b)$ として，x と y の文字を入れ替えた式で表わされる。

（したがって，f のグラフと f^{-1} のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称となる。）

一次関数の逆写像は，一次関数である。

〔問〕 1. $f(x)=2x-3$ において，$f^{-1}(2)$，$f^{-1}(-1)$，$f^{-1}(0)$ を求めよ。

〔例〕 3. $f:R\to R$，$f(x)=x^2$ は，R から R の中への写像であったから，f の逆写像は存在しない。しかし，定義域と終域を制限して，

$f:X\to X$，$X=\{x \mid x\geqq o\}$，$f(x)=x^2$ とすれば，1 対 1 対応となるから，f の逆写像 f^{-1} が考えられ，それを

$f^{-1}:X\to X$，$X=\{x \mid x\geqq o\}$，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ と定義する。

（注意） $f:X_1\to X_2$，$X_1=\{x \mid x\leqq o\}$，$X_2=\{x \mid x\geqq o\}$ としても，1 対 1 対応となり，そのときの逆写像は，

$f:X_2\to X_1$，$X_2=\{x \mid x\geqq o\}$，$X_1=\{x \mid x\leqq o\}$，$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ となる。

〔問〕 2. 次の関数の定義域と終域とを適当に定めて，逆写像を作れ。

(1) $f(x)=2x^2$　　(2) $f(x)=-3x^2$

(3) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$　　(4) $f(x)=x^2-2$

(5) $f(x)=2x^2+\frac{1}{3}$　　(6) $f(x)=(x-1)^2-4$

〔問〕 3, 上の問 2 をグラフによって考えよ。

二次関数の逆写像は，無理関数である。

（注意） この逆は成りたたないが，$f(x)=p\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq o)$ の形の無理関数は，二次関数の逆写像である。

§ 2. 方程式の解法への利用

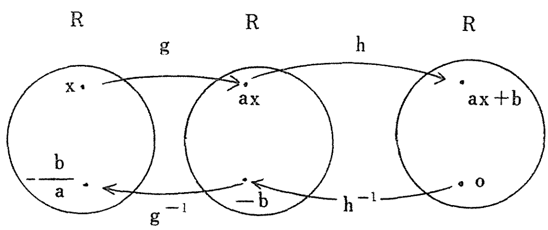
〔例〕 1. $ax+b=o$ $(a\neq o)$ を解け。

〔考え方〕 $f(x)=ax+b$ を考えると，この写像 f による像 $f(x)$ が 0 となる原像を求めることである。したがって，求める x は $f^{-1}(0)$ とかける。

ここで，f を．$g:g(x)=ax$ に，$h:h(x)=x+b$ を合成した写像 $f=h\circ g$ と考えて，$f^{-1}=g^{-1}\circ h^{-1}$ より

$$f^{-1}(o)=g^{-1}\circ h^{-1}(o)=g^{-1}(-b)=-\frac{b}{a}$$

となる。



$ax+b=o$

h^{-1} ↓ ↓h^{-1} (h^{-1} : b を引く。)

$ax\quad=-b$

g^{-1} ↓ ↓g^{-1} (g^{-1} : a で割る。)

$x=-\frac{b}{a}$

一像に，方程式 $f(x)=o$ を解くことは，写像 f によって，像が 0 になるような原像 x を求めることである。

したがって，f の定義域，終域を適当に定めて f を 1 対 1 対応としたうえで，逆写像 f^{-1} を求めれば，$x=f^{-1}(o)$ で x が求まる。

§3. 指 数 法 則

〔定義〕「集合Xの任意の元xにそれ自身を対応させることも一つの写像と考え，これを恒等写像といい，eで表わす。

すなわち，$f: X \to X$，$f(x)=x$　（このとき $f=e$）

・$y=f(x)=x$　は恒等写像である。

逆関数の定義より，　$(f^{-1}\circ f)\,(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$

また，　$(f\circ f^{-1})\,(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$

したがって，$f^{-1}\circ f$ も $f\circ f^{-1}$ も恒等写像となるから，$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=e$

さて，$f: X\to X$，$X=\{x \mid x\geqq o\}$，$f(x)=x^2$ とその逆写像 $f^{-1}: X\to X$，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ において，$f\circ f^{-1}(x)=x$ だから，x_1，$x_2\in x$ なる x_1 と x_2 を考えると，$f\circ f^{-1}(x_1)=x_1$，$f\circ f^{-1}(x_2)=x_2$ すなわち $f(\sqrt{x_1})=x_1$，　$f(\sqrt{x_2})=x_2$

また，$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ であったから，

$$f(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2})=f(\sqrt{x_1})\cdot f(\sqrt{x_2})=x_1\cdot x_2$$

$\therefore$　$\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x^2}=f^{-1}(x_1\cdot x_2)=\sqrt{x_1\cdot x_2}$，よって $\boxed{\sqrt{x'}\cdot\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1\cdot x_2}}$

このようにして，指数法則が導かれる（$x_1\geqq o$，$x_2\geqq o$ に注意する。）

また，$\sqrt{x^2}=f^{-1}(f(x))=(f^{-1}\circ f)\,(x)=x$　　$(x\geqq o)$

ところが，$x\leqq o$ のとき $\sqrt{x^2}$ を考えるには，

$g: X_1\to X_2$，$X_1=\{x \mid x\leqq o\}$，$X_2=\{x \mid x\geqq o\}$，$g(x)=x^2$ であるような1対1対応gを考えねばならぬ。このとき，逆写像 g^{-1} は，

$g^{-1}: X_2\to X_1$，$g^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ であるから，（§1．〔例〕3（注意）を参照）

$-\sqrt{x^2}=g^{-1}(g(x))=(g^{-1}\circ g)\,(x)=x$

$\therefore$　$\sqrt{x^2}=-x$

結局，$\boxed{\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & (x\geqq o) \\ -x & (x< o)\end{cases}}$ である。

§4. 同 値 関 係

$f: X\to Y$ が1対1対応のとき，

$$x_1=x_2 \rightleftarrows f(x_1)=f(x_2)\quad x_1,\ x_2\in X,\quad f(x_1),\ f(x_2)\in Y$$

〔例〕1．$f: R\to R$，$f(x)=x+a$ は1対1対応だから $x_1=x_2\rightleftarrows x_1+a=x_2+a$

これは，「等式の両辺に同じ数を加えても，両辺から同じ数を引いても等式は成り立つ」ということを表わしている。

〔例〕2．$f: R\to R$，$f(x)=ax$ では，$a\fallingdotseq o$ のとき1対1対応だから，

$x_1=x_2\rightleftarrows ax_1=ax_2$ となるが，

$a=o$ のときは，任意の $x_1\in R$ に対して，つねに，$f(x_1)=o$，すなわち $f(R)=\{o\}$ となり，fは1対1写像とならないから，fの逆写像（aで割る操作）は考えられない。

よって，$ax_1=ax_2\to x_1=x_2$ とはならない。

これは，「等式の両辺に同じ数をかけても，両辺を0でない同じ数で割っても，等式は成り立つ」ということを表わしている。

（注意）$f:X\to Y$ において，$f(X)=b$（bはYの特定の元）となるとき，fを定数関数という。例えば $f:R\to R$, $f(x)=-2$ などである。

〔例〕 3. $\frac{1}{x}=x+1$ を解け。

$x\neq o$ のとき，$\frac{1}{x}=x+1\rightleftarrows 1=x(x+1)$

〔問〕 1. 次の方程式を解け。

(1) $\frac{1}{x-1}=x+2$　　　(2) $\frac{1}{x^2-x}=\frac{2}{x^2-1}$

〔例〕 4. $f:R\to R$, $f(x)=x^2$ は1対1写像でないから，x_1, $x_2\in R$ に対して，

$x_1=x_2\to x^2{}_1=x^2{}_2$ であるが

$x^2{}_1=x^2{}_2\to x_1=x_2$ とはならない。

しかし，$f:X\to X$, $X=\{x\mid x\geqq o\}$, $f(x)=x^2$ とすれば，1対1対応となり，

$x_1=x_2\rightleftarrows x^2{}_1=x^2{}_2$ $(x_1, x_2\geqq o)$

〔例〕 5. $\sqrt{x+1}=x-1$ を解け。

（考え方） 両辺を2乗すれば二次方程式になるが，“2乗する”という操作は例4に示したとおり，定義域を正又は0の実数にとらなければ1対1対応にならないから，

$\sqrt{x+1}\geqq o$, かつ $x-1\geqq o$ より $x\geqq 1$ なる条件のもとに両辺を2乗した式

$x+1=(x-1)^2$ と同値となる。

〔問〕 2. 次の方程式を解け。

(1) $2\sqrt{x}=3x-1$　　　(2) $-\sqrt{x-1}=x-2$

写像の適用例

1. 指数関数，対数関数，三角関数

(1) 指数関数の平均変化率

$f=f(x)=a^x$ について，xが1だけ増えると $f(x)$ の増加は，

$f(x+1)-f(x)=a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x=(a-1)f(x)$ となり，$a-1$ は一定だから，

$f(x)$ の増加率は $f(x)$ 自身に比例する。

(2) 指数関数と対数関数との関係

$f:R\to R$, $f(x)=a^x$ $(a>o,\ a\neq 1)$ においては $f(x)>o$ だから，終域Yを $\{y\mid y>o\}$ にとり，$f:R\to Y$ とすれば1対1対応となり，そのとき逆写像 $f^{-1}:Y\to R$ が対数関数 $f^{-1}(x)=\log_a x$ である。したがって，対数関数の定義域（真数の変域）は正となる。

(3) 三角関数

三角関数は，角の大きさの集合から実数の集合への写像である。そして，次のように定義域と終域を制限すれば1対1対応となるから逆写像（逆三角関数）が定義できる。

$y=\sin x$ は 定義域Xを $\{x\mid -\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\}$, 終域Yを $\{y\mid -1\leqq y\leqq 1\}$

$y=\cos x$ は 〃 $\{x\mid o\leqq x\leqq\pi\}$, 〃

$y=\tan x$ は 〃 $\{x\mid -\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\}$,（終域Yは実数R）

2. 数Ⅱ教材への応用

(1) 数　列

「自然数の集合Nから実数の集合Rへの一つの写像fが与えられたとき，fによるNの元

nの像 $f(n)$ の列を数列という。」

（注意） この場合特に $f(n)$ を a_n と表わし，数列を $\{a_n\}$ で表わす。

したがって，数列の一般項を表わす式がその対応の規則を示している。このようにして関数と数列とを写像の考えで結びつけ，① 数列の極限と関数の極限との対応，② 無限級数の和と定積分との関係，をつかませることができる。

〔例〕 $f(x)=2x$，$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$，$f(x)=3^x$ 等から数列を作らせる。

〔例〕 等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$ と一次関数 $f(x)=a_1+(x-1)d$

等比数列 $a_n=a_1 r^{n-1}(r>o)$ と 指数関数 $f(x)=a_1 r^{x-1}$

自然数の異乗の数列 $\{n^k\}$ と べき関数

などの対応を考えさせる。

(2) 順列，組合せ

有限集合から有限集合への写像としてとらえさせ，両者の相違を考えさせることができる。

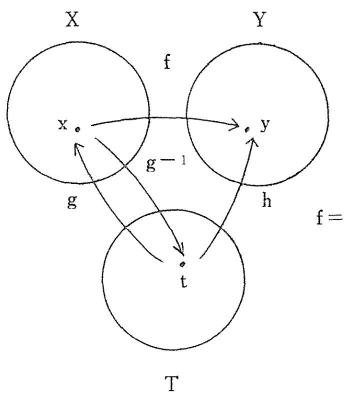
(3) 極座標，ベクトル

極座標は，集合 {平面上の点} の，集合 $\{(r,\ \theta) \mid r>o,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$ への1対1対応としてとらえさせ，ベクトルもその集合の，実数の組 (a, b) の集合への1対1対応としてとらえさせる。

(4) 関数の媒介変数表示

集合Xから集合Yへの写像 f を他の2つの写像で間接に表わすこと。（合成写像の応用）

$y=f(x)$ を $\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$ で表わす。



$f=h\circ g^{-1}$

〔例〕 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ の媒介変数表示

$X=\{x \mid -1\leqq x\leqq 1\}$，$Y=\{y \mid 0\leqq y\leqq 1\}$ だから，値域がXとなるような1対1写像gとして $x=g(t)=\cos t$，$t\in T=\{t \mid 0\leqq t\leqq\pi\}$ をとればよい。