

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 14 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740037

研究課題名(和文) ハンドル体結び目と不変量

研究課題名(英文) Handlebody-knots and invariants

研究代表者

石井 敦 (Ishii, Atsushi)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：00531451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：ハンドル体絡み目とは、3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。ハンドル体結び目は成分数1のハンドル体絡み目のことです。種数1のハンドル体結び目は通常の結び目に対応しています。つまり、ハンドル体結び目は結び目の自然な一般化になっています。本研究の研究成果は次にあげる通りです：multiple conjugation quandle と呼ばれる部分的に群の構造を持ったカンドルに対して(コ)ホモロジー理論が導入されました。

研究成果の概要(英文)：A handlebody-link is a disjoint union of handlebodies embedded in the 3-sphere. A handlebody-knot is a one component handlebody-link. A genus one handlebody-knot corresponds to a usual knot. That is, a handlebody-knot is a natural generalization of a knot. The results of this study are as follows: The (co)homology theory for multiple conjugation quandles, which is a quandle with partial group operations, was introduced.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：位相幾何学 結び目理論

1. 研究開始当初の背景

ハンドル体結び目を区別する強力な不変量を構成することが求められていました。また、これまでに段階的に拡張され定義されてきたカンドルコサイクル不変量に対して、普遍的な不変量を与えることが求められていました。

3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことをハンドル体結び目といい、複数のハンドル体が埋め込まれたものをハンドル体絡み目といいます。成分数が1のハンドル体絡み目がハンドル体結び目です。二つのハンドル体絡み目は3次元球面のイソトピーで移りあうとき、つまり連続的に一方を他方に変形できるとき、同値であると定義します。円周の埋め込みである(通常の)結び目の正則近傍をとることで、種数1のハンドル体結び目が得られ、そのハンドル体結び目としての同値類は結び目の同値類と一致します。したがって、ハンドル体結び目理論は、種数に関する結び目理論の自然な一般化になっています。

ハンドル体結び目は(通常の)結び目の自然な一般化である一方、空間グラフの正則近傍としての顔も持ちます。ハンドル体結び目のスパインとして空間3価グラフをとり、これを射影すると、その射影図と交点情報から元のハンドル体結び目を復元することができます。よって、ハンドル体結び目のダイアグラムを、ハンドル体結び目のスパインとして得られる空間3価グラフのダイアグラムとして定義します。ハンドル体結び目のダイアグラムは、ハンドル体結び目に対して一意に定めることができませんが、同値なハンドル体結び目を表すための必要十分条件は Reidemeister move によって与えられます。つまり、ハンドル体結び目のダイアグラムは、Reidemeister move の有限列によって移り合うとき、そのときに限り、同値なハンドル体結び目を表します。

カンドルは、(通常の)結び目のダイアグラムにおいて交点にカンドル演算を与え、Reidemeister move を公理化することで得られる代数です。カンドルを用いることで、結び目ダイアグラムに対して彩色することができ、カンドル彩色数は結び目の初等的な不変量を与えます。カンドルとして、二面体カンドルを用いることで、Fox の p-彩色を得ることができます。ハンドル体結び目に対しては、flow の概念を用いてカンドルを多重化して彩色を定義することができます。また、flow により多重化されたカンドルは、より一般に(非可換)群により多重化されたカンドルに拡張されます。

カンドルには、群と同様に(コ)ホモロジー

が定義され、そのコサイクルをカンドルコサイクルといいます。カンドル彩色が与えられたダイアグラムにカンドルコサイクルを用いて重み付けを行い、weight sum をとることでカンドルコサイクル不変量を得られます。カンドルコサイクル不変量は、カンドル彩色数よりも強力な不変量で、鏡像を区別することのできる不変量です。ハンドル体結び目に対しても、適切な条件を満たすカンドルコサイクルを用いることで、カンドルコサイクル不変量が定義されます。

このように定義されたカンドルコサイクル不変量は多くのハンドル体結び目を区別してきました。しかし、ハンドル体結び目の表の作成においては、まだ区別ができていないハンドル体結び目があり、より強力な不変量を構成することが求められていました。また、ハンドル体結び目のカンドルコサイクル不変量は、カンドル彩色が拡張されるのに伴い、拡張を繰り返してきました。したがって、枠組みの中での普遍的な不変量が何であるかを明らかにすることが求められていました。

2. 研究の目的

ハンドル体結び目に対して彩色に用いる代数構造が少しずつ拡張されてきました。これまでに構成されてきた彩色に対して、彩色に用いる代数の普遍的なものを構成することが研究の目的の一つでした。また、彩色に用いる代数構造が拡張されるのに伴い、対応する(コ)ホモロジー理論とカンドルコサイクル不変量も拡張されてきました。この拡張されてきた(コ)ホモロジー理論やカンドルコサイクル不変量に対しても、普遍的なものを構成することが研究の目的の一つでした。そして、この普遍的な枠組みの中でカンドルコサイクル不変量の性質を明らかにし、ハンドル体結び目の区別に役立てていくことが研究の目的でした。

3. 研究の方法

結び目に対する Reidemeister move とカンドルの公理は1対1に対応しています。結び目ダイアグラムにおいて、交点に対してカンドル演算を与え、Reidemeister move を公理化した代数がカンドルです。ハンドル体結び目に対しても、同様に Reidemeister move を公理化して代数を得るのが基本的な方法です。しかし、ハンドル体結び目の場合には、ダイアグラムが3価頂点を含み、この扱いを指定する必要があります。交点にはカンドル演算を与え、頂点に新たな演算を与えることで、Reidemeister move の公理化を試みまし

た。また、これまでのカンドルコサイクル不変量では、頂点には weight を与えていませんでしたが、頂点にも weight を与えることで (コ) ホモロジー理論を構築し、カンドルコサイクル不変量の構成を試みました。

4. 研究成果

multiple conjugation quandle と呼ばれる部分的に群の構造を持ったカンドルを導入し、その (コ) ホモロジー理論を導入しました。また Nosaka cocycle を用いた場合にコサイクルが分離していることを明らかにしました。この研究は Scott Carter 氏、Masahico Saito 氏、Kokoro Tanaka 氏との共同研究です。ハンドル体結び目のダイアグラムにおいて、交点にカンドル演算を、頂点に新たな演算を与え、Reidemeister move を公理化することで得られる代数が、部分的な群構造から定まる conjugation quandle をパラレルに内包するカンドルであることを示し、multiple conjugation quandle を導入しました。multiple conjugation quandle に対して、カンドル (コ) ホモロジー理論と群 (コ) ホモロジー理論を同時に内包する (コ) ホモロジー理論を導入しました。また Nosaka cocycle を用いた場合には、コサイクルがカンドルコサイクルと群コサイクルに分離していることを明らかにしました。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Atsushi Ishii and Akira Masuoka, Handlebody-knot invariants derived from unimodular Hopf algebras, J. Knot Theory Ramifications 23 査読有 (2014), 1460001, 24 pp.
DOI: 10.1142/S0218216514600013

Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Yeonhee Jang and Kanako Oshiro, A $\mathbb{S}\mathbb{G}\mathbb{S}$ -family of quandles and handlebody-knots, Illinois J. Math. 57 査読有 (2013), 817--838.
<http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1415023512>

Kai Ishihara and Atsushi Ishii, An operator invariant for handlebody-knots, Fund. Math. 217 査読有 (2012), 233--247.
DOI: 10.4064/fm217-3-3

Atsushi Ishii and Masahide Iwakiri, Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies, Canad. J. Math. 64 査読有 (2012), 102--122.
DOI: 10.4153/CJM-2011-035-0

Atsushi Ishii, Kengo Kishimoto, Hiromasa Moriuchi and Masaaki Suzuki, A table of genus two handlebody-knots up to six crossings, J. Knot Theory Ramifications 21 査読有 (2012), 1250035, 9 pp.
DOI: 10.1142/S0218216511009893

Atsushi Ishii and Kengo Kishimoto, A finite type invariant of order at most 4 for genus 2 handlebody-knots is a constant map, Topology Appl. 159 査読有 (2012), 1115--1121.
DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.018

[学会発表](計12件)

Atsushi Ishii, The skein index and Fox p -colorings, Knots and Manifolds, 大阪市立大学(大阪府大阪市), 2015.2.7

Atsushi Ishii, The Markov theorem for spatial graphs with Y -oriented IH -labeled spatial trivalent graphs, Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学(大阪府大阪市), 2015.1.16

Atsushi Ishii, ハンドル体絡み目とハンドル体組み紐, ハンドル体結び目とその周辺 VII, 奈良女子大学(奈良県奈良市), 2014.10.4

Atsushi Ishii, Circulatory orientations and handlebody-links, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学(広島県東広島市), 2014.9.28

Atsushi Ishii, A multiple conjugation quandle, International Conference on Topology and Geometry 2013, 島根大学(島根県松江市), 2013.9.6

Atsushi Ishii, Multiple conjugation quandles and handlebody-knots, 2013 TAPU Workshop on Knot Theory and Related Topics, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea, 2013.8.5

Atsushi Ishii, An introduction to handlebody-knot theory, Topology seminar, University of South Alabama,

USA, 2013.2.14

Atsushi Ishii, A handlebody-knot is a spatial trivalent graph without bridges up to IH-moves, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学 (東京都目黒区), 2013.1.16

Atsushi Ishii, On some properties of handlebody-knots, Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学 (大阪府大阪市), 2012.10.19

Atsushi Ishii, Handlebody-knots and their invariants, 幾何学コロキウム, 北海道大学 (北海道札幌市), 2012.8.3

Atsushi Ishii, Handlebody-knots and their invariants, トポロジー金曜セミナー, 九州大学 (福岡県福岡市), 2012.6.8

Atsushi Ishii, Coloring invariants for handlebody-knots, colloquium, Kyungpook National University, Daegu, Korea, 2012.5.1

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~aishii/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 敦 (ISHII ATSUSHI)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：00531451