

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740003

研究課題名(和文)アフィン・リー代数の臨界レベルの加群に対するパスモデルの構成

研究課題名(英文)Construction of path models for modules of critical level over affine Lie algebras

## 研究代表者

佐垣 大輔 (SAGAKI, Daisuke)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：40344866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：(1) レベル・ゼロ Lakshmibai-Seshadri (LS) パスを、(放物型)量子 Bruhat グラフを用いて記述した。その応用として、レベル・ゼロの LS パス全体のなすクリスタル上の次数関数 (= エネルギー関数) を量子 Bruhat グラフ上の最短有向パスのウェイトを用いて記述した。  
 (2) 臨界レベルの既約最高ウェイト表現と密接な関係がある半無限 Bruhat 順序 (および、半無限 Bruhat グラフ) を用いて、半無限 LS パスを定義し、それら全体のなすクリスタルが、エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底と同型になることを証明した。

研究成果の概要(英文)：(1) We described level-zero Lakshmibai-Seshadri (LS) paths in terms of the (parabolic) quantum Bruhat graph. As an application, we described the degree function (= energy function) on the crystal of level-zero LS paths in terms of the weights of shortest directed paths in the quantum Bruhat graph.  
 (2) We introduced semi-infinite LS paths in terms of the semi-infinite Bruhat order (and semi-infinite Bruhat graph), which is closely related to irreducible highest weight representations of critical level, and then we proved that the crystal of semi-infinite LS paths is isomorphic, as a crystal, to the crystal basis of the extremal weight module.

研究分野：リー代数・量子群の組合せ論的表現論

キーワード：量子アフィン代数 アフィン・リー代数 結晶基底 クリスタル パスモデル 量子 Bruhat グラフ 半無限 Bruhat グラフ エクストリーマル・ウェイト加群

数式等を記述するために LaTeX のコマンドを用いる。

### 1. 研究開始当初の背景

$G$  を複素連結単純代数群とし、 $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー代数 (複素数体上の有限次元単純リー代数)、 $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数とする。 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$  を  $\mathfrak{g}$  に付随する (untwisted) アフィン・リー代数とし、 $\mathfrak{h}_{\text{aff}}$  を  $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$  の Cartan 部分代数とする。各  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$  に対して、 $L(\lambda)$  を最高ウェイト  $\lambda$  の既約最高ウェイト  $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ -加群とする。このとき、 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$  の自然な中心元  $K \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}$  は、既約最高ウェイト加群  $L(\lambda)$  に  $\lambda(K)$  倍で作用する。この  $\lambda(K)$  の値を  $L(\lambda)$  (または  $\lambda$ ) のレベルと呼び、それが  $\mathfrak{g}$  の双対 Coxeter 数の  $-1$  倍に等しいとき、 $L(\lambda)$  (または  $\lambda$ ) は臨界レベルであると呼ばれる。

Edward Frenkel と Dennis Gaiatsgory は、論文 “Local geometric Langlands correspondence and affine Kac-Moody algebras” (Progress in Mathematics vol. 253, pp.69 ~ 260, Birkhauser Boston, Boston, 2006) において、

i)  $G$  の Langlands 双対群の local system,

ii) アフィン・グラスマン多様体上の  $D$ -加群のなす圏、

iii) (当研究の研究対象である) 臨界レベルの  $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ -加群のなす圏、

の間の自然な対応 (幾何的 Langlands 対応) について考察し、多くの予想を提示した。その後、彼らを含む多くの研究者の精力的な研究により、アフィン・グラスマン多様体と臨界レベルの  $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ -加群の間の関係が詳細に調べられ、これらの予想のかなりの部分は解決した。しかし、未解決な重要課題も依然多く残っており、幾何的 Langlands 対応の研究は、研究開始当初から現在に至るまで、ホットなテーマであると言える。

### 2. 研究の目的

臨界レベルの  $L(\lambda)$  に対して組合せ論的なモデル (パス模型の理論) を構成し、臨界レベルの  $L(\lambda)$  を組合せ論的に研究するための糸口を与える。

### 3. 研究の方法

$\mathfrak{g}_{\text{fin}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}_{\text{aff}}$  とおく (これは  $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$  の有限次元簡約部分リー代数であることを注意する)。当研究では、まず

$\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}$  が critical level であり、かつ  $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$  の優整ウェイトである場合に、荒川 知幸の論文 “Character of representations of affine Kac-Moody algebras at the critical level (2007)” において得られた指標公式を用いて  $L(\lambda)$  の  $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$ -加群としての既約分解を (コンピュータなどを使用して具体的に) 計算し、その計算結果を踏まえて  $L(\lambda)$  のパス模型を構成する。そして、そこで得られた結果を参考にして一般の臨界レベルの  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{aff}}^*$  に対して  $L(\lambda)$  のパス模型を構成し、 $L(\lambda)$  の指標の研究を行う。

### 4. 研究成果

- (1) レベル・ゼロの Lakshmiba-Seshadri (LS) パスに対応する Mirikovic-Vilonen 多面体の理論の構築を考察した。各 LS パス  $p$  に対して、多面体の頂点集合  $M(p)$  を与える写像を定め、これが単射であることを証明した。
- (2) レベル・ゼロの LS パスを、有限 Weyl 群上の (放物型) 量子 Bruhat グラフを用いて記述することに成功した。さらに、その応用として、レベル・ゼロの LS パス全体のなすクリスタル上の次数関数 (= エネルギー関数) を量子 Bruhat グラフ上の最短有向パスのウェイトを用いて記述した。また、この次数関数の「双対」にあたる左次数関数も同様に記述した。
- (3) Postnikov による量子 Bruhat グラフの最短有向パスのウェイトに関する基本定理を、放物型量子 Bruhat グラフの場合に一般化し、組合せ論的な証明を与えた。
- (4) 部屋 (alcove) パス模型とレベル・ゼロ LS パスとの間の具体的な対応を与えた。その応用として、対称 Macdonald 多項式の  $t=0$  の特殊化をレベル・ゼロ LS パスを用いて記述することに成功した。
- (5) (2) の研究結果をルート作用素の視点から再検証し、ルート作用素を用いた (自然な) 別証明を与えることに成功した。
- (6) 臨界レベルの既約最高ウェイト表現と密接な関係がある半無限 Bruhat 順序 (および、半無限 Bruhat グラフ) を用いて、半無限 LS パスを定義し、それら全体のなすクリスタルが、エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底と同型になることを証明した。
- (7) レベル・ゼロの LS パスのなすクリスタルの部分集合で、その次数付

きの指標が, 非対称 Macdonald 多項式の  $t=0$  または  $t=\infty$  の特殊化になるようなものを明示的に与えることに成功した.

- (8) エクストリーマル・ウェイト加群における Demazure 加群の商加群として, その次数付き指標が 非対称 Macdonald 多項式の  $t=0$  における特殊化になるものを与えた.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- (1) D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a  $Z_3$ -orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, Trans. Amer. Math. Soc. (掲載決定・印刷中).
- (2) Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Explicit description of the action of root operators on quantum Lakshmibai-Seshadri paths, Advanced Studies in Pure Mathematics (掲載決定・印刷中).
- (3) M. Ishii, D. Sagaki, and H. Shimakura, Automorphisms of Niemeier lattices for Miyamoto's  $Z_3$ -orbifold construction, Math. Z. Vol.280 (2015), 55-83.
- (4) C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, Int. Math. Res. Not. Vol.2015 (2015), 1848--1901.
- (5) V. Chari, G. Fourier, and D. Sagaki, Posets, Tensor Products and Schur positivity, Algebra Number Theory Vol.8 (2014), 933--961.
- (6) S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part III: Proof of the connectedness, in "Symmetries, integrable Systems and Representations", Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Vol.40, pp.361--402, Springer, Heidelberg, 2013.
- (7) S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes, Transform. Groups Vol.17 (2012), 195--207.
- (8) S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part I: Construction of the affine analogs, in "Algebraic Groups and Quantum Groups", Contemp. Math. Vol. 565, pp.143--184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- (9) S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part II: Explicit description, in "Algebraic Groups and Quantum Groups", Contemp. Math. Vol. 565, pp.185--216, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- (10) S. Naito and D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types  $B_{\infty}$ ,  $C_{\infty}$ , and  $D_{\infty}$ , Trans. Amer. Math. Soc. Vol.364 (2012), 6531--6564.

[学会発表](計 7 件)

- (1) Daisuke Sagaki, Symmetric Macdonald polynomials and quantum Lakshmibai-Seshadri paths, Tsukuba Workshop on Infinite-dimensional Lie Theory and Related Topics, 2014年10月20日 ~ 10月23日, 筑波大学(茨城県つくば市).
- (2) 佐垣 大輔, Introduction to LS paths I & II, 第3回シューベルトカルキュラスとその周辺, 2014年8月26日 ~ 8月29日, 岡山理科大学(岡山県岡山市).
- (3) Daisuke Sagaki, Semi-infinite Lakshmiba-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, ICM 2014 Satellite Conference on Representation Theory and Related Topics, 2014年8月6日 ~ 8月9日, EXCO, Daegu (韓国).
- (4) 佐垣 大輔, Demazure subcrystals of crystal bases of level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, 第17回代数群と量子群の表現論(RAQ2014), 2014年6月1日~6月4日, 呉羽ハイツ(富山県富山市).
- (5) Daisuke Sagaki, Description of level-zero Lakshmibai-Seshadri paths in terms of the quantum Bruhat graph, 国際研究集会「Shanghai Workshop on Representation Theory -- Special session at Osaka」, 2012年12月15日 ~ 12月16日, 大阪大学(大阪府大阪市).
- (6) 佐垣 大輔, 量子 Bruhat グラフを用いたレベル・ゼロ LS パスの表示, 研究集会「組合せ論的表現論とその周辺」, 2012年10月9日 ~ 10月12日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).
- (7) Daisuke Sagaki, Maximal dimension of tensor products and Schur positivity for classical Lie algebras, Algebraic

and combinatorial approaches to representation theory, 2012年5月18日～5月20日, University of California Riverside (アメリカ).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐垣 大輔 (SAGAKI, Daisuke)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：40344866

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし