No.
Date 11/22(火)

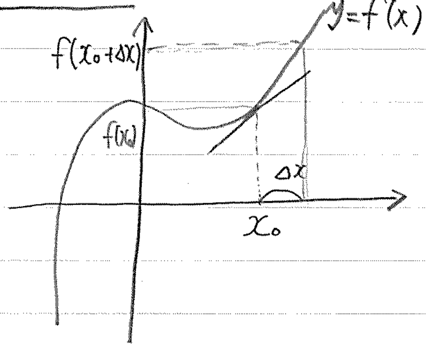
第8回 数理科学ⅢB

多変数 の微分

{ 線形代数
{ 微積分 (多変数) $\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$z=f(x,y)$

偏微分

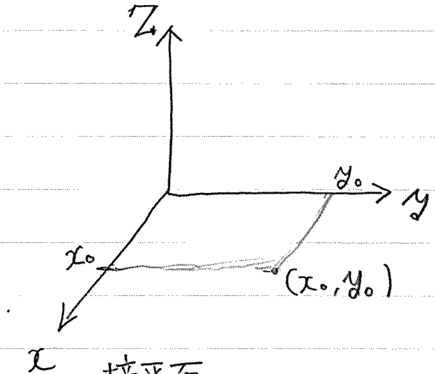


曲がっているのはイヤ

$\Rightarrow$ 直っすぐなものでおきかえよう。

線形代数

合成



$\Delta x \mapsto \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

複雑

接平面

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ 平面

接線では 比例関係

比例定数

$\Delta y = a\Delta x$

$f'(x)$

$\Delta z = \underline{(a,b)}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$

比例というのは

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1次元の線形代数

$f'(x_0)$ = 線形写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

微分係数

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$z=f(x,y)$

$f'(x,y)$. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$への線形写像

1×2の行列

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x)$

$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$への線形写像

$x\in\mathbb{R}^n$

$f'(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$への線型写像

$m\times n$の行列

$\underline{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}$ $\underline{g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l}$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} \quad f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$$

$g\circ f$

$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$への線型写像

No.
Date

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f'(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$への線型写像

$(g \circ f)' = \underbrace{g'(f(x))}_{b} \circ \underbrace{f'(x)}_{a}$

$x \in \mathbb{R}^n$ $a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$

$d \in D \to f(x+ad)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $f(x+ad) - f(x) = b\, d$

$f'(x)(a) = b$

$t \mapsto \underbrace{x + at}_{\mathbb{R}^m}$

$t \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}^m \mapsto f(y) \in \mathbb{R}^m$

合成

$t \mapsto f(x + at)$

$f'(x) \circ \bigcirc$ a

$f'(x)(a)$

$\mathbb{R}$-module E Euclidean

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$

E^X

$V: \mathbb{R}$-module

E: Euclidean $\mathbb{R}$-module

$f: V \to E$ homogeneous $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in V$

Lemma $f: V \to E$: homogeneous

$f'(x)$ は independent of x $f'(x) = f'(0)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

xの代わりにαx

(証明) $f(x + da) = f(x) + d f'(x)(a)$ dの代りにαd

$\underline{f(\alpha x + \alpha d a) - f(\alpha x) = \alpha d\, f'(\alpha x)(a)}$ f: homogeneous

$\varphi: D \to \mathbb{R}$ Euclidean

$\alpha\{\underline{f(x+da) - f(x)}\}$ $\exists! a \in \mathbb{R}$ $\varphi(d) = \varphi(0) + ad$

$\text{“} f'(x)(a)d$ $d \in D$ $da = db \Rightarrow a = b$

$\therefore \alpha d f'(\alpha x)(a) = \alpha d f'(x)(a)$ $\forall d \in D$

$\alpha f'(\alpha x)(a) = \alpha f'(x)(a)$

maruman

No.
Date

$$\alpha f'(\alpha x)(a) = \alpha f'(x)(a)$$

これをαで微分

$$f'(\alpha x)(a) + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f'(\alpha x)(a)\right) = f'(x)(a)$$

$\alpha = 0$

$$f'(0)(a) = f'(x)(a)$$

微分はどこでやろうと同じである。

$f : V \to E$

$x = a$

命題　f : homo $\Rightarrow f = f'(0)$　$f(x + \alpha a) = f(x) + \alpha f'(x)(a)$

f : linear

証明　$\alpha f'(x)(x) = f(x + \alpha x) - f(x)$

$= (1+\alpha) f(x) - f(x) = \alpha f(x)(a)$