5/31(火)

第6回 数理科学ⅢA

Category　　Sets　集合の作る category　　paradigm

objects　集合

morphisms (arrows)　関数

定義域　dom

値域　codomain

$\mathrm{cod}(g\circ f)=\mathrm{cod}(g)$

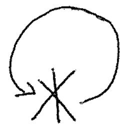
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

$\mathrm{dom}(g\circ f)=\mathrm{dom}(f)$

$A\xrightarrow{id_A}A$　　$f\circ id_A=f$

$id_B\circ f=f$

objects 貧弱　唯1個



monoids　結合律、単位元、逆元は要求しない.

morphisms 貧弱

2個の objects AからBへの morphisms は 高々1個

例, $(\mathbb{N},+)$ {0,1,2,…}

掛け算 {1,2,3,…}

$x\leq x$

~~$x\leq y$ & $y\leq x$ $\Rightarrow$ $x=y$~~

$x\leq y$ & $y\leq z$ $\Rightarrow$ $x\leq z$

preorder

擬順序

集合論　すべては集合である.　$A\to B$　一元論

(a,b)

関数も集合

Category　関数　重きを与える　二元論

集合　対等

直積　どういうつくり方をするか

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

Categoryの場合
機能に注目

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] \arrow[dl, bend right=60, "f"'] \arrow[dr, bend left=60, "g"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

$\exists ! h$　$\circlearrowleft$　$\circlearrowleft$

$f = pr_1 \circ h$

$g = pr_2 \circ h$

可換

universal(普遍性)

直和

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[r, "in_1"'] \arrow[ur, "f"] & A \sqcup B \arrow[u, dashed] & B \arrow[l, "in_2"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

$\circlearrowleft$　$\circlearrowleft$

Coproduct

category $\mathbb{C}$　　$\mathbb{C}^{op}$　　opposite category

dual category

Category 圏論

2つの categories

$\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$

$F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$　functor(関手)

A $\mathbb{C}$のobject $\to$ $F(A)$　$\mathbb{D}$のobject

f:　$\mathbb{C}$のmorphism $\to$ $F(f)$　$\mathbb{D}$のmorphism

$f : A \to B$　　$F(f) : F(A) \to F(B)$

∘ $dom(F(f)) = F(dom(f))$

∘ $cod(F(f)) = F(cod(f))$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

∘ $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$A \longmapsto F(A)$

$F(id_A) = id_{FA}$

例　群 group

Grp　群とその間の準同型の作る category

forgetful functor (忘却関手)

$\longrightarrow$ 集合.

$(G, \circ, e)$

2項演算 忘れる.

集合 → 群

$\boxed{\text{集合Aで生成される自由群}}$

$a, b \in A$

a

a^{-1}

$a b^{-1} c d^{-1} e$　列

concatenation

associative

$a\, b b^{-1}\, e$

$(a b^{-1} c)^{-1} = c^{-1} b a^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{集合}}{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \text{Aで生成される自由群} \\ B & \end{tikzcd}$$

$a b^{-1} \quad c$

$f(a) f(b)^{-1} f(c)$

集合 Bで生成される自由群

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{集合}}{A} \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd}$$

Aを基底とする線形空間

$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \cdots$

Natural transformation
(自然変換)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

F,G , Category $\mathbb{C}$から Category $\mathbb{D}$への functors

$\mathbb{C}$の object A　Commute ~~Comute~~

F(A)からG(A)への morphism

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

$G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f)$

例　群 Grp　Grp G　Grp G　Ab → Grp

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Pr"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G/[G,G] \arrow[d] \\ H \arrow[r] & H/[H,H] \end{tikzcd}$$

$[G,G] \quad xy = yx$

$x^{-1} y^{-1} x y = e$