type theory ゟ回避
集合論の paradox
$x \in x$
$x \in N$

Russell & Whitehead
Principia Mathematica
⇓ 20世紀の始め
1930年代
Church
formal

homotopy type theory ⇒ dependent type theory

simple type theory
Categorical Logic and Type theory
B. Jacobs

$\{N, B, \ldots\}$
自然数 ブール代数値

$+ : N, N \to N$
$succ : N \to N$ $n \mapsto n+1$
$\wedge : B, B \to B$ and
$= : N, N \to B$

signature
$\Sigma = (T, F)$
T : a set of Basic type
F : 関数の集合

Calculus 変数 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ 可算個
context
context Γ
$\Gamma(x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n)$
$\Delta(x_1 : B_1, x_2 : B_2, \ldots, x_m : B_m)$
concatenation
$\Gamma, \Delta = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x_{n+1} : B_1, \ldots, x_{n+m} : B_m)$

term

$\Gamma \vdash M : A \qquad \angle k \quad \angle J$

$n : \mathbb{N},\ m : \mathbb{N} \vdash \mathrm{plus}(\mathrm{times}(m, n), m) : \mathbb{N}$

規則

$$\frac{}{x : A \vdash x : A} \ (\text{identity})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : A_1 \quad \cdots \quad \Gamma \vdash M_n : A_n}{\Gamma \vdash F(M_1, \cdots, M_n) : A_{n+1}} \quad F : A_1, \cdots, A_n \to A_{n+1} \ (\text{function symbol})$$

$$\frac{x_1 : A_1, \cdots, x_n : A_n \vdash M : B}{x_1 : A_1, \cdots, x_n : A_n, x_{n+1} : A_{n+1} \vdash M : B} \ (\text{weaking})$$

$$\frac{\Gamma, x_n : A, x_{n+1} : A \vdash M : B}{\Gamma, x_n : A \vdash M[x_n / x_{n+1}] : T} \ (\text{contraction})$$

$$\frac{\Gamma, x_i : A_i, x_{i+1} : A_{i+1}, \Delta \vdash M : B}{\Gamma, x_i : A_{i+1}, x_{i+1} : A_i\ \Delta \vdash M[x_i / x_{i+1}, x_{i+1} / x_i] : B} \ (\text{exchange})$$

$\mathrm{plus} : \mathbb{N}, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\mathrm{if} : B, \mathbb{N}, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\boxed{x_1 : B, x_2 ; \mathbb{N} \vdash \mathrm{if}(x_1, x_2, \mathrm{plus}(x_2, x_2) : \mathbb{N}}$

derivable

証)

$$\dfrac{\dfrac{}{x_1:\mathbb{B}\vdash x_1:\mathbb{B}}}{x_1:\mathbb{B},x_2:\mathbb{B}\vdash x_1:\mathbb{B}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1:\mathbb{N}\vdash x_1:\mathbb{N}}}{x_1:\mathbb{N},x_2:\mathbb{N}\vdash x_1:\mathbb{N}}}{x_1:\mathbb{N},x_2:\mathbb{N}\vdash x_2:\mathbb{N}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_1:\mathbb{N}\vdash x_1:\mathbb{N}\quad x_1:\mathbb{N}\vdash x_1:\mathbb{N}}{x_1:\mathbb{N}\vdash plus(x_1,x_1):\mathbb{N}}}{x_1:\mathbb{N},x_2:\mathbb{N}\vdash plus(x_1,x_1):\mathbb{N}}}{x_1:\mathbb{N},x_2:\mathbb{N}\vdash plus(x_2,x_2):\mathbb{N}}$$

$$\overline{x_1:\mathbb{B},x_2:\mathbb{N}\vdash if(x_1,x_2,plus(x_2,x_2)):\mathbb{N}}$$

dependent type theory

1960年代後半

systematic

数学的議論 $\longrightarrow$ formal AUTOMATH project

computer check

1970年代 Martin-Löf

排中律 $A\vee\neg A$ 背理法

選択公理 (axiom of choice)

× mechanical checking of mathematical arguments

○ formulation of a funclational language for constructive mathmatics.

$\{k\in\mathbb{N} \mid k\le n\}$

$n:\mathbb{N}\vdash \boxed{\cancel{Nat(n)}}:Type$

$n:\mathbb{N}\vdash NatList(n):Type$

長さ n の List $\qquad n\times m$

$X^n = X\times\cdots\times X$

$n,m:\mathbb{N}$

$(X_i)_{i\in I}$

添字

$i:I\vdash X_i:Set$

context

$\Gamma = x_1 : A_1, x_2 : A_2, x_3 : A_3, \ldots, x_n : A_n$

$n : \mathbb{N}, \ell : NatList(n)$ well-formed

$n : \mathbb{N}, z : Matrix(n, m)$ ×

judgement

$a : A$ 空間 "a is an object of type A"

$a \equiv b : A$ "a and b are definitionally eaqual objects of type A"

$a =_A b$ propositimal equality