円錐曲線論と二次曲線論

2015 年 5 月 13 日

1

古代ギリシアでは, 幾何学が盛んで, 図形を描いて議論を行っていた. 補助線をうまく引いたりして, 図形を図形そのものとして扱うやり方であった. 一方, 座標を使って図形を式で表すことができる. 例えば, $x^2 + y^2 = a^2$ は円, $x + y = 0$ は直線を表す. しかしこれは近代になってデカルトが用いだした考え方で, 古代ギリシアでは見られないことである. 古代ギリシア人はとにかく図形で考えるのが大好きで, x^2 も 1 辺 x の正方形の面積としてとらえていた.

今回は, 紀元前 3 世紀後半にアポロニウスが考えたことで, 円錐を平面で切って現れる図形について考える.

アポロニウスは「円錐曲線論」(全 8 巻) を書いた. 前の時代にユークリッドの「円錐曲線論」(全 4 巻) があったのだが, こちらは残念ながら失われて残っていない. コピーも印刷技術もない時代の話で, アポロニウスがまとめたもののほうが優れていて, 広く写本をされていた.

まず, 図形の定義をする.

- 円　　1 点からの距離が等しい点の軌跡.
- 楕円　　2 点からの距離の和が一定である点の軌跡.
- 双曲線　　2 点からの距離の差が一定である点の軌跡.
- 放物線　　1 点と (その点を通らない) 直線の距離が等しい点の軌跡.

円錐は, 直線をとり, 平行でなく直交もしないある直線を軸として回転させると, できる. (図 1-上) [1]. 交点は円錐の頂点となる. 直線が動いてできた曲面上にある円錐の頂点を通る直線を円錐の母線という.

円錐を平面 π で切る. 切り口に現れる図形は平面 π の傾き具合によって異なる.

軸と母線とのなす角を α とする ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

平面 π と軸のなす角を β とする ($0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$).

切り口には

[1] 後ろのページに図をつけたのでご参照ください.

- $\alpha < \beta$ のとき　　　　楕円
- $\alpha > \beta$ のとき　　　　双曲線
- $\alpha = \beta$ のとき　　　　放物線
- 特に, $\beta = 90^\circ$ のとき　　円

が現れる (図 1-下). これを証明する.

最初に, 少し簡単な場合から説明する. いきなり円錐から入るのではなく, まず準備体操で円柱を斜めに切ることを考える（同じアイディアを円錐の場合でも使う）. このとき切り口は楕円になる (図 2).

円柱を平面 α で切断するとする. 円柱と同じ半径の球 O, O' を平面 α の左右から円柱に内接させる. 球を平面 α に近づけていくと, どちらの球もある点で平面 α に接して止まる. 接点を F, F' とする. 円柱と球の接点はそれぞれ円 R, R' になる.

切断面の外周に点 P をとり, $PF + PF'$ が一定となることをいいたい.

P を通って円柱と平行に直線を引き, 円 R と交わる点を Q とする. PF も PQ も P から 球 O への接線だから $PF = PQ$ となる. 球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになる.

同様に, P を通って円柱と平行に直線を引き, 円 R' と交わる点を Q' とすれば $PF' = PQ'$ である.

したがって, $PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$ （一定）となる.

次にいよいよ円錐を切る. 大事なのは, 球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるということである.

(1) $\alpha < \beta$ のとき楕円が現れる (図 3-上)

図のように円錐に内接し, 切断面に接する 2 つの球 O, O' を考える. 切断面との接点を F, F' とする.

切断面の外周に点 P をとり, $PF + PF'$ が一定となることをいいたい.

P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O に接する点を K とする. PF も PK も P から 球 O への接線だから $PF = PK$ となる.

同様に, P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O' に接する点を K' とすれば $PF' = PK'$ となる.

したがって, $PF + PF' = PK + PK' = KK'$ （一定）となる.

(2) $\alpha > \beta$ のとき双曲線が現れる (図 3-下)

ほとんど楕円のときと同じようにしてわかる.

図のように円錐に内接し, 切断面に接する 2 つの球 O, O' を考える. 切断面との接点を F, F' とする.

切断面の外周に点 P をとり, $PF' - PF$ が一定となることをいいたい.

P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O に接する点を K とする. PF も PK も P から 球 O への接線だから $PF = PK$ となる.

同様に, P と頂点を結ぶ直線を引き, 球 O' に接する点を K' とすれば $PF' = PK'$ となる.

したがって, $PF' - PF = PK' - PK = KK'$ （一定）となる.

(3) $\alpha = \beta$ のとき放物線が現れる (図 4)

図のように円錐に内接し, 切断面 π に接する球 O を考える. 切断面との接点を F とする.

球 O と円錐の共有円を含む平面を π' とする. π と π' の交線を d とする.

切断面の曲線上に点 P をとり, P から直線 d へ下ろした垂線の足を H, 平面 π' へ下ろした垂線の足を K とする.

PM が円錐の頂点を通るように π' 上に M をとる.

$\angle KPH = \beta$, $\angle KPM = \alpha$, $\alpha = \beta$ より, $\triangle PKH \equiv \triangle PKM$ である. したがって, $PH = PM$ である.

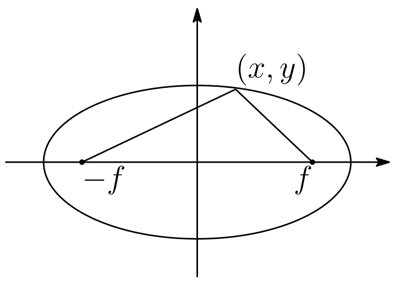
球の外の点から球に接線を引いた場合, その長さは同じになるので, $PM = PF$, よって $PH = PF$ である.

2

今度は座標をとって円錐曲線の式を求めてみよう.

(1) 楕円の式

点 $(f, 0)$, $(-f, 0)$ からの距離の和が $2a$ となる楕円の式を求めよう.



楕円上の点を (x, y) とすると

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

移項して

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$fx - a^2 = -a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

もう一度両辺を 2 乗して整理すると

$$(f^2 - a^2)x^2 = a^2\{(x-f)^2 + y^2\}$$

ところで, 点 $(f, 0)$, $(-f, 0)$ からの距離の和が $2a$ なので, $2a > 2f$, すなわち $a > f$ である. $b^2 = a^2 - f^2$ とおくと

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

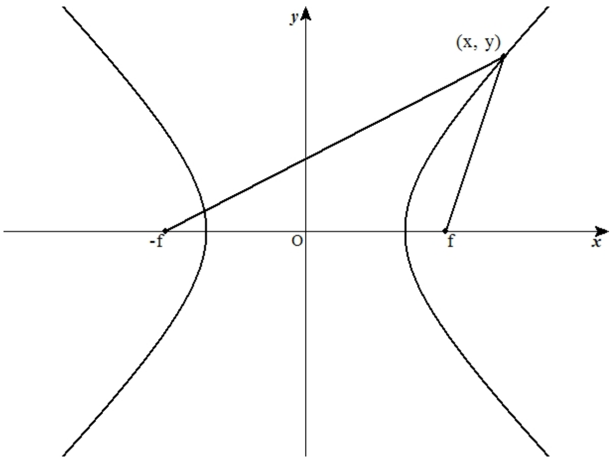
両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(2) 双曲線の式

双曲線の式も同じようなやり方で出る.

点 $(f, 0)$, $(-f, 0)$ からの距離の差が $2a$ となる双曲線の式を求めよう.



双曲線上の点を (x, y) とすると

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \pm 2a$$

移項して

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$fx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

もう一度両辺を 2 乗して整理すると

$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2 - a^2)$$

ところで, 今度は点 $(f,0)$, $(-f,0)$ からの距離の差が $2a$ なので, $2a < 2f$, すなわち $a<f$ である. $b^2=f^2-a^2$ とおくと

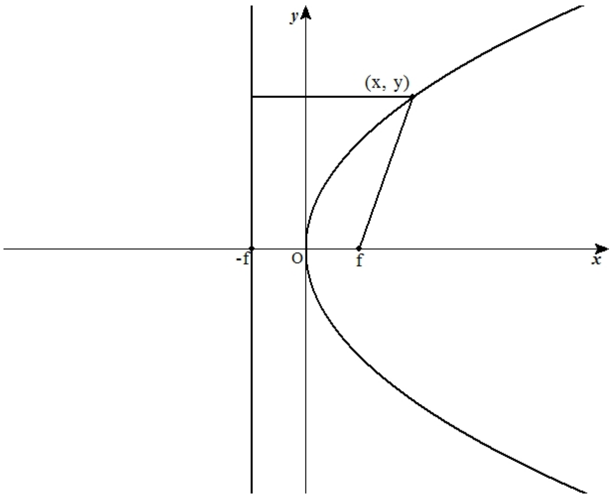
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(3) 放物線の式

直線 $x=-f$ と点 $(f,0)$ からの距離が等しい放物線の式を求めよう.



放物線上の点を (x,y) とすると

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=|x-(-f)|$$

両辺を 2 乗すると

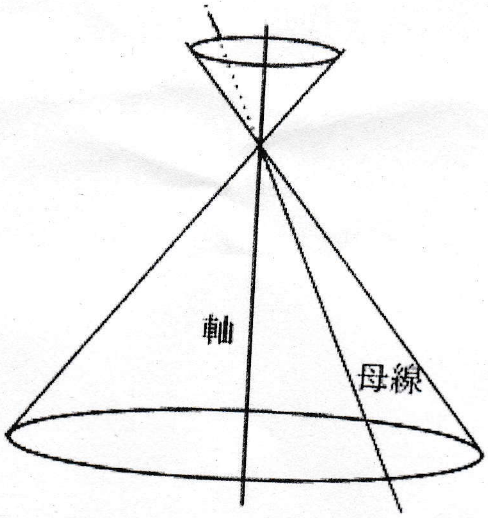
$$(x-f)^2+y^2=(x+f)^2$$

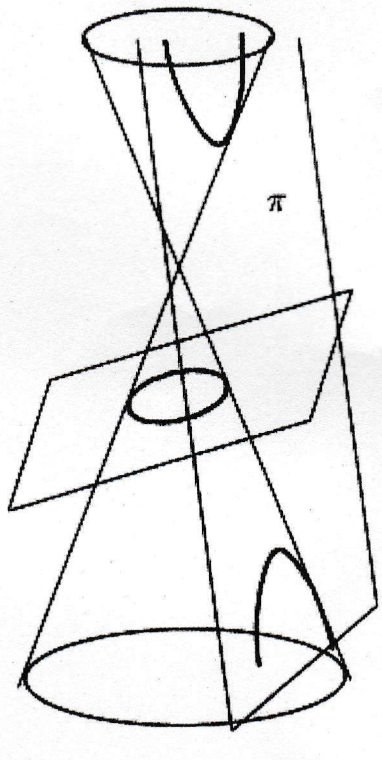
整理すると

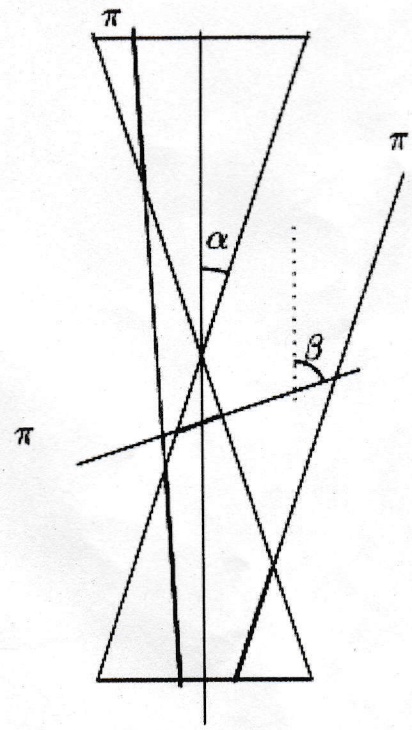
$$y^2=4fx$$

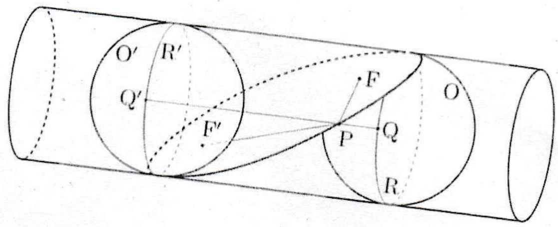
なお, x, y を入れ替えれば, 見慣れた 2 次関数の形である.

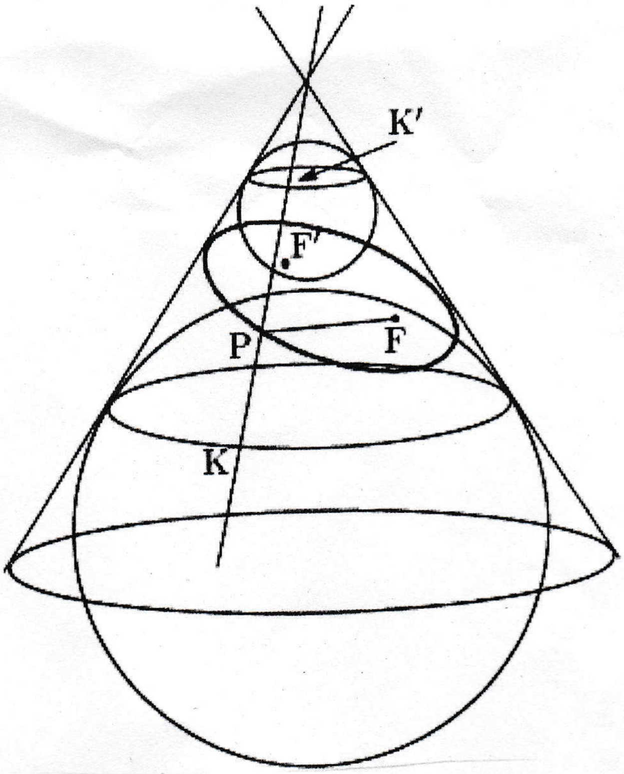
以上, 前半で古代ギリシアの図形そのものを扱う考え方を, 後半で図形を式で表し計算する考え方を体験したことになる.

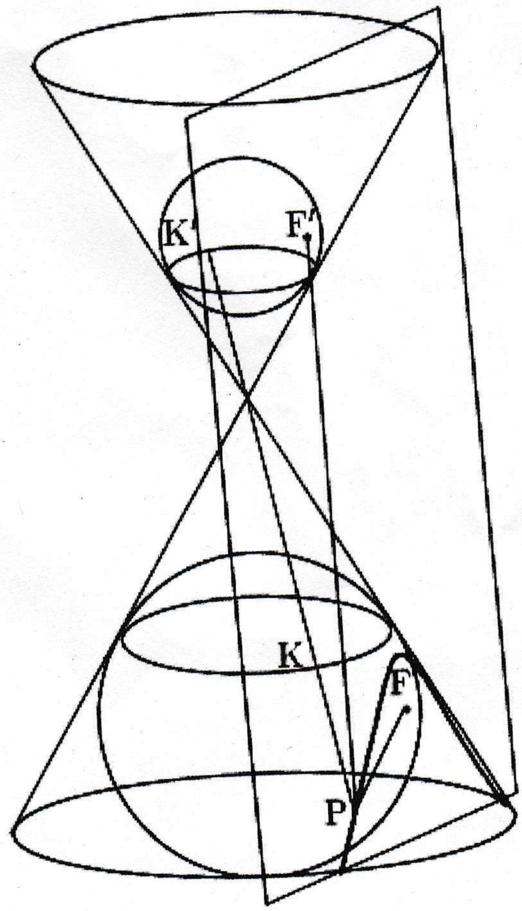

軸
母線

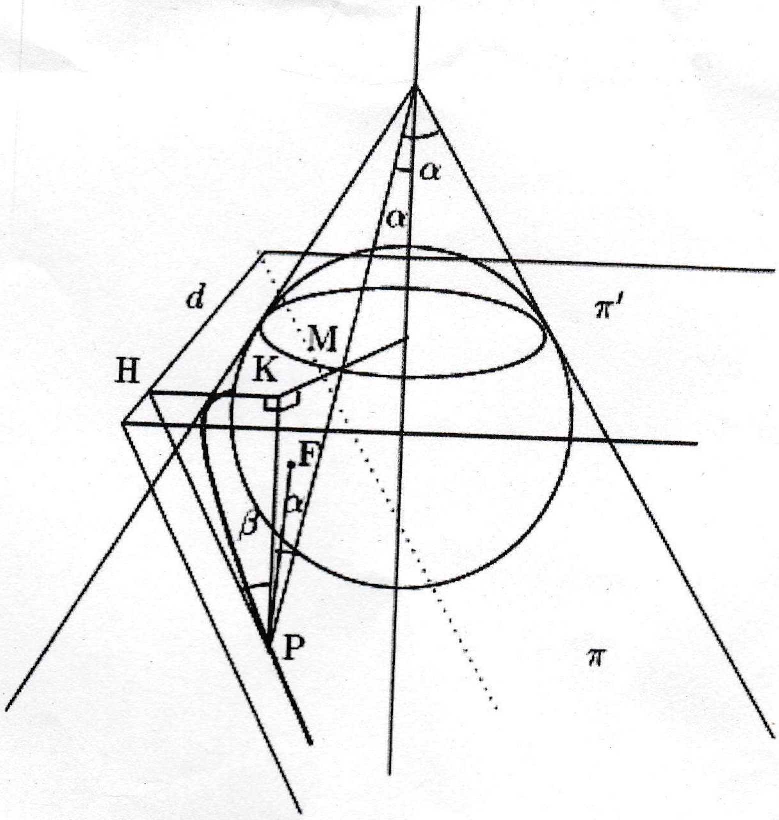

π


π
π
α
β
π


O′
R′
Q′
F′
F
P
Q
O
R


K′
F′
P
F
K


K′
F′
K
F
P


α
α
d
π′
M
H
K
F
α
β
P
π