微積分演習第9回

連立線型微分方程式

鶴亀算
x y

$$\begin{cases} x+y = \bigcirc & 頭 \\ 2x+4y = \bigcirc & 足 \end{cases}$$

放射性元素
$x' = ax$
解くと、 $x = x(t) = Ce^{at}$
$x(0) = C$ （初期条件）

$x = x(t)$
$y = y(t)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ 2×2行列

連立 $$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

指数関数 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$ 無限次の多項式

複素数 $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$

指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

2×2行列全体、足し算、掛け算、が定義されている

$$e^A = \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{E}} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

方程式は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{2\times 2} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ と解ける

$\left.\begin{array}{l} C_1 = x(0) \\ C_2 = y(0) \end{array}\right\}$ 初期条件

e^{tA}の計算

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 対角型のときは

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

したがって $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \cdots$

$$= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$$

対角化

$\underset{\text{対角型でない}}{\underline{A}} = P \underset{\text{対角型}}{\underline{B}} P^{-1}$ のとき $\left(\begin{array}{l} P: \text{正則行列} \\ PP^{-1} = P^{-1}P = E \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} A^2 &= (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \\ &= PB\,\underline{P^{-1}P}\,BP^{-1} \\ &= PB^2P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= (PB\underline{P^{-1})(P}B\underline{P^{-1})(P}BP^{-1}) \\ &= PB^3P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

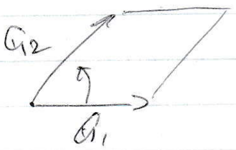
$$e^A = e^{PBP^{-1}}$$
$$= E + PBP^{-1} + \frac{1}{2!}\underbrace{(PBP^{-1})^2}_{=PB^2P^{-1}} + \frac{1}{3!}\underbrace{(PBP^{-1})^3}_{=PB^3P^{-1}} + \cdots$$
$$= P\underbrace{\left(E + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots\right)}_{=e^B}P^{-1}$$

行列式（determinant）

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とする.

a_1, a_2 の張る平行四辺形の
符号のついた面積を $S(a_1, a_2)$ とする.

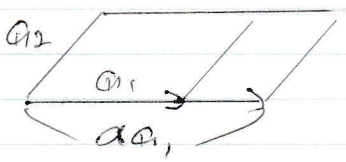


a_1 から a_2 反時計回り $+$
時計回り $-$

$S(a_1, a_2) = -S(a_2, a_1)$ が成り立つ

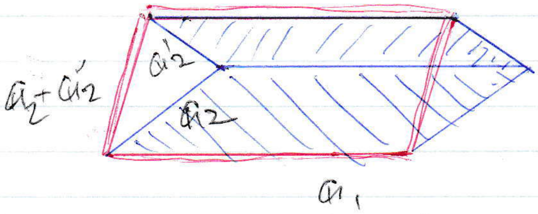
$a_1 = a_2$ とすれば
$$S(a_1, a_1) = -S(a_1, a_1)$$
$$2S(a_1, a_1) = 0$$
$$S(a_1, a_1) = 0$$ ——— 平行四辺形の面積0

$S(\alpha a_1, a_2) = \alpha S(a_1, a_2)$ が成り立つ



$S(a_1, a_2 + a_2') = S(a_1, a_2) + S(a_1, a_2')$

成り立つ



宿題

$a_1 = a_{11}\underbrace{e_1}_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + a_{21}\underbrace{e_2}_{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$, $a_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$ とする。

$$
\begin{aligned}
S(a_1, a_2) &= S(a_{11}e_1 + a_{21}e_2,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= \cdots\cdots \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

となることを示せ.