No. 1

Date '16. 6. 2

# 微積分演習 第7回

## 微分方程式

$x$ はtの関数　$x = x(t)$

$$\boxed{x' = ax \quad (a\text{は定数})}$$

$x = Ce^{at}$ ($C$: 定数) は上をみたす.

$$(Ce^{at})' = Cae^{at}$$

初期条件 $t=0$ とすると. $x = C$

ほかの $x$ があったとすると

$$\left(\frac{x}{e^{at}}\right)' = (x\, e^{-at})'$$
$$= x'e^{-at} + x(e^{-at})'$$
$$= ax\, e^{-at} - axe^{-at}$$
$$= 0$$

よって

$$\frac{x}{e^{at}} = C$$
$$x = Ce^{at}$$

解の一意性

決定論的世界観
$\longleftrightarrow$ 自由意思

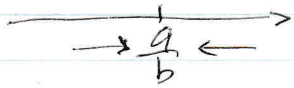
$x$ は人口とする

| 今 | 1年後 |
| --- | --- |
| 1000 | 1050 |
| 2000 | 2100 |

$x' = ax$　単純な人口の model

もう少しよい式

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x \qquad (a>0)$$



$a = bx$ のとき $0$

放射性元素 $a<0$

$x' = ax$ に従う（但し、統計的法則）

問題

$x(T) = \frac{1}{2}x(0)$ となる $T$［半減期］を求めよ.

$$T = -\frac{\log 2}{a}$$

---

小6

鶴亀算

$$\underbrace{\text{鶴}}_{x}\ \underbrace{\text{亀}}_{y}$$

$$\begin{cases} x + y = \bigcirc & \text{頭の数} \\ 2x + 4y = \bigcirc & \text{足の数} \end{cases}$$

連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

代数方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$x = x(t)$
$y = y(t)$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$ 連立微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x'' = -x$　2階の微分方程式

$x' = y$ とおく。
$= 0x + 1y$
$y' = -x = (-1)x + 0y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 連立微分方程式と思ってよい

---

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 連立線型微分方程式の一般的な解法

（$A$は$2\times 2$の行列）

和 $A+B$
スカラー倍 $\alpha A$
積 $AB$
定義される

$A(B+C) = AB + AC$
$AB \neq BA$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{3!} + \cdots$（複素数でも、和、スカラー倍、積が定義される）

$e^{\boxed{A}} = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ と定義する。

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = E + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$$
$$= E + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots$$

微分すると.

$$(e^{tA})' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A + \frac{2tA^2}{2} + \frac{3t^2A^3}{3!} + \cdots$$
$$= A\left\{E + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \cdots\right\}$$
$$= Ae^{tA}$$

$$\left(e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)' = (e^{tA})'\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= Ae^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$