No. 1

Date '16 . 5 . 19

微積分演習 第5回

Taylor展開

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$\qquad d_1, d_2, \cdots \in D$

$$f(x+d_1) = f(x) + f'(x)d_1$$

$$f(x+d_1+d_2) = f(x) + f'(x)\underbrace{(d_1+d_2)}_{\lambda_2^1(d_1,d_2)} + f''(x)\underbrace{d_1d_2}_{\lambda_2^2(d_1,d_2)}$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2)^2$$

$$f(x+d_1+d_2+d_3) = f(x) + f'(x)\underbrace{(d_1+d_2+d_3)}_{\lambda_3^1(d_1,d_2,d_3)}$$

$$+ f''(x)\underbrace{(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)}_{\lambda_3^2(d_1,d_2,d_3)} + f'''(x)\underbrace{d_1d_2d_3}_{\lambda_3^3(d_1,d_2,d_3)}$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3)$$

$$+ \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2+d_3)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(d_1+d_2+d_3)^3$$

2変数 X_1, X_2 の多項式

$X_1{}^2 + X_2 \neq X_2{}^2 + X_1$

$X_1{}^2 + X_2{}^2 = X_2{}^2 + X_1{}^2$

X_1, X_2 を入れかえて変わらないとき
対称式 という

$X_1 + X_2$ を 1次の基本対称式という $\lambda_2^1(X_1, X_2)$ と書く

X_1X_2 を 2次 〃 $\lambda_2^2(X_1, X_2)$

0 を 0次 〃

Newtonの定理

任意の対称式は基本対称式の整式で表される。

例 $X_1{}^2 + X_2{}^2 = (X_1+X_2)^2 - 2X_1X_2$

3変数 x_1, x_2, x_3 の多項式

$x_1+x_2+x_3$ を1次の基本対称式という。 $\lambda_3^1(x_1, x_2, x_3)$
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ を2次の 〃 $\lambda_3^2(x_1, x_2, x_3)$
$x_1x_2x_3$ を3次の 〃 $\lambda_3^3(x_1, x_2, x_3)$

と書く

一般形

$$\boxed{f(x+d_1+\cdots+d_n) = f(x)+f'(x)\lambda_n^1(d_1,\cdots,d_n)+f''(x)\lambda_n^2(d_1,\cdots,d_n) + \cdots + f^{(n)}(x)\lambda_n^n(d_1,\cdots,d_n)}$$

宿題： nに関する帰納法で証明せよ
（下の補題を使う）

$${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_{r+1} + {}_nC_r$$

$$(\text{右辺}) = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{n!(n-r)+n!(r+1)}{(r+1)!(n-r)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} = (\text{左辺})$$

組み合わさの考え方

$\circ$ $\circ$ $\circ$ …… $\circ$
1 2 3 $n+1$

これを含む選び方 ${}_nC_r$
含まない選び方 ${}_nC_{r+1}$

補題

$$\lambda_{n+1}^{r+1}(d_1,\cdots,d_{n+1}) = \underbrace{\lambda_n^{r+1}(d_1,\cdots,d_n)}_{d_{n+1}\text{を含まない}} + \underbrace{\lambda_n^r(d_1,\cdots,d_n)\,d_{n+1}}_{d_{n+1}\text{を含む}}$$

e^x, $\sin x$, $\cos x$ は無限次の多項式で書ける

$$f(x) = e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = f'(0) = 1 \qquad (e^x)' = e^x$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2} \qquad f^{(n)}(0) = 1$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!}$$
$$\vdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$$f(x) = \sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

$$a_0 = f(0) = 0$$
$$a_1 = f'(0) = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 0$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3!}$$
$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$$
$$\vdots$$

$$\left(\begin{array}{ll} f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$

奇数次のみ

$$f(x) = \cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

$$a_0 = f(0) = 1$$
$$a_1 = f'(0) = 0$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$$
$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{4!}$$
$$\vdots$$

$$\left(\begin{array}{ll} f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

偶数次のみ

複素数 z に対し

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\cdots$$ とする.

$z = ix$ (x:実数) を代入

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots\cdots$$
$$= 1 + \underline{ix} - \frac{x^2}{2} - \underline{\frac{ix^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$
$$= \left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots\right\} + i\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right\}$$
$$= \cos x + i \sin x$$

指数法則

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1+ix_2}$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\cos(x_1+x_2) + i\sin(x_1+x_2)$$

$$e^{ix_1+ix_2} = e^{ix_1}\cdot e^{ix_2}$$

$$= (\cos x_1 + i\sin x_1)(\cos x_2 + i\sin x_2)$$

$$= \cos x_1\cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 + i(\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \cos x_2)$$

[指数法則から加法定理が出る。
指数関数と三角関数は親戚！]

宿題　指数法則を示せ

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^{z_1+z_2} = 1+(z_1+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2}+\frac{(z_1+z_2)^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2}+\frac{z_1^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2}+\frac{z_2^3}{3!}+\cdots\right)$$

$z_1^i z_2^j$ の係数を見よ。

$i+j=n$ とする。
$(z_1+z_2)^n$ のところから
$z_1^i z_2^j$ が出る。

$$\frac{1}{i!}\frac{1}{j!} z_1^i z_2^j$$