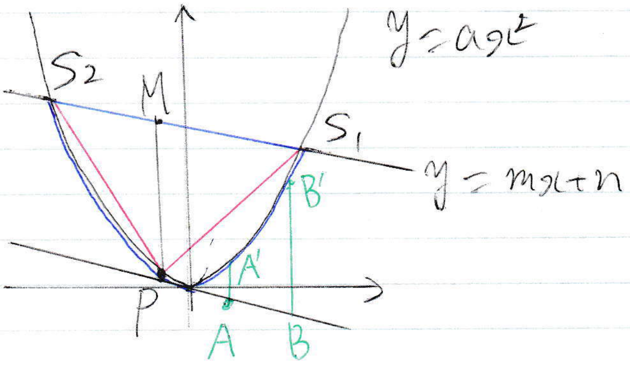
No. 1

Date '16. 4. 28

微積分演習 第3回



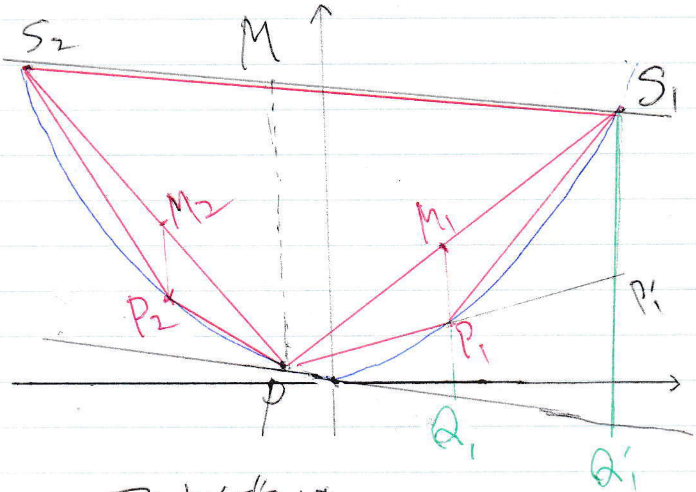
アルキメデス

(1) S_1S_2の中点をMとする。
Mから放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点がPである

(2) 接線上、点A, Bをとる
A, Bから放物線の軸に平行に引いた直線が放物線と交わる点をA' B'とすると

確かめよ

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$ が成り立つ。



S_1Pの中点 M_1
S_2Pの中点 M_2
放物線の軸と平行に直線を引いて放物線と交わる点
P_1, P_2

アルキメデスは

$$\boxed{\frac{1}{4}\triangle PS_1S_2 = \triangle PP_1S_1 + \triangle PP_2S_2}$$ を証明した。

くり返すと、切片の面積は、

$$S+\frac{1}{4}S+\left(\frac{1}{4}\right)^2S+\cdots\cdots$$

$$=S\left\{\underbrace{1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots}_{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3/4}=\frac{4}{3}}\right\}$$ 等比級数

$\boxed{\frac{1}{4}\Delta PS_1S_2=\Delta PP_1S_1+\Delta PP_2S_2}$ の証明

M_1P_1 を延長して接線と交わる点 Q_1
S_1から軸に平行に直線を引き、接線と交わる点 Q_1'
PP_1 を延長、S_1Q_1' と交わる点 P_1'

$\overline{PQ_1}:\overline{PQ_1'}=1:2$
$\overline{P_1Q_1}:\overline{S_1Q_1'}=1:4$

$\overline{M_1Q_1}:\overline{S_1Q_1'}=1:2$

$\overline{S_1Q_1'}=l$ とおく

$$\overline{M_1P_1}=\frac{1}{4}l$$

S_1Q_1' と P の距離 h とおく、

$$\Delta S_1PP_1=\Delta M_1P_1P+\Delta M_1P_1S_1=\frac{1}{8}lh$$

四辺形 $MPQ_1'S$ は平行四辺形
したがって

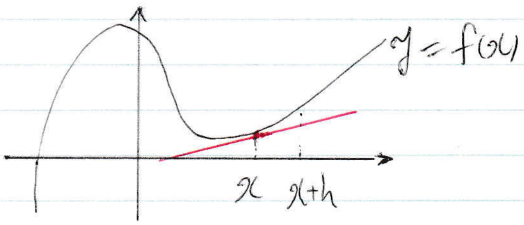
$$\Delta MPS_1=\Delta PQ_1'S_1=\frac{1}{2}lh$$

同様にして $\Delta MPS_2:\Delta PP_2S_2=8:1$ だから

$$\frac{1}{4}\Delta PS_1S_2=\Delta PP_1S_1+\Delta PP_2S_2$$

微積分
17C Newton
18C Euler

19C 以降 極限の概念



曲がっているのはイヤ
⇓
まっすぐなものでおきかえよう

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

17〜18C
hが十分小さければ

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$$

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d \quad d\text{の1次式}$$

実際にこの考えで微分してみる.

(1) $f(x) = c$ (定数)

$$\begin{aligned} f(x+d) - f(x) &= c - c \\ &= 0 \\ &= 0 \cdot d \quad (d\text{の係数を見る}) \end{aligned}$$

したがって
$$f'(x) = 0$$

(2) $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x+d) - f(x) &= (x+d) - x \\ &= d \\ &= 1 \cdot d \end{aligned}$$

したがって
$$f'(x) = 1$$

(3) $f(x) = x^2$

$$f(x+d) - f(x) = (x+d)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2dx + d^2 - x^2$$
$$= 2x \cdot d$$

したがって
$$f'(x) = 2x$$

宿題

$f(x) = x^n$ (n:自然数) を微分せよ.

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$\alpha f(x+d)$$
$$= \alpha(f(x) + f'(x)d)$$
$$= \alpha f(x) + f'(x)\alpha d$$

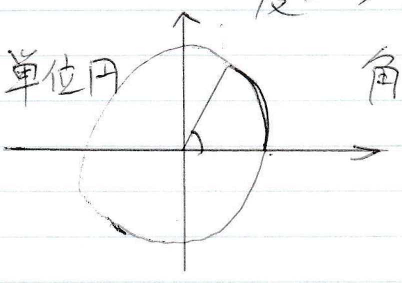
$$(f+g)' = f' + g'$$

多項式関数
微分できる.

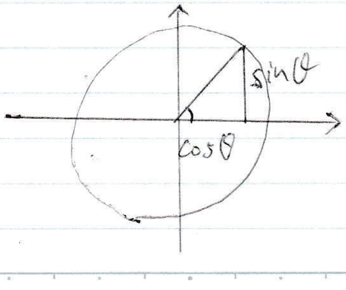
三角関数

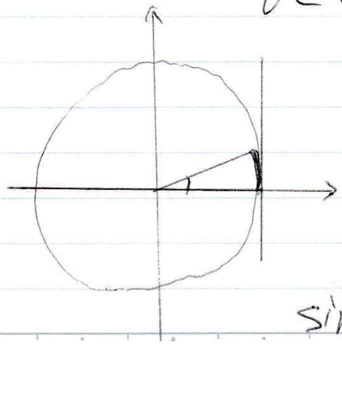
度 → ラジアン

単位円



角の開きを円弧の長さで表す.





$\theta \in D$ のとき
円弧と接線が一致

$$\sin d = d$$
$$\cos d = 1$$

$$\sin^2 d + \cos^2 d = d^2 + 1 = 1$$

加法定理

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{\fallingdotseq 1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{\fallingdotseq d}$$

$$= \sin x + d\cos x$$

したがって

$$(\sin x)' = \cos x$$