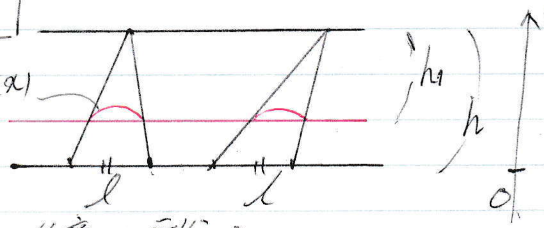
No. 1

Date '16・4・21

微積分演習 第2回

Cavalieri の原理（19C前半）

平面



$\frac{h_1}{h} l$

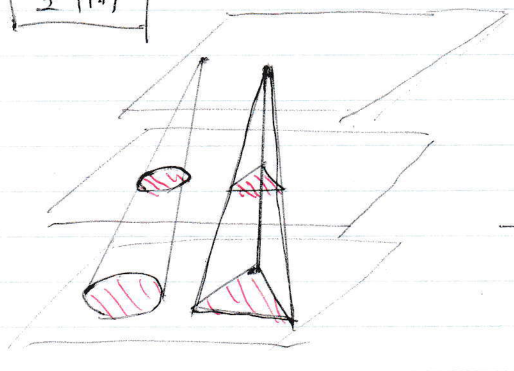
相似

任意の平行な
直線で切る。

底辺と高さが等しい三角形
は面積等しい

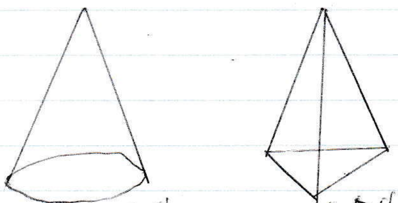
積分を知っていれば
面積は $\int_0^h l(x)\,dx$

空間



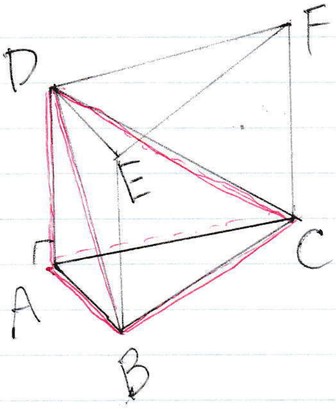
断面の面積が等しい
→ 体積が等しい

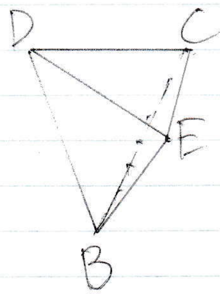
錐体の体積

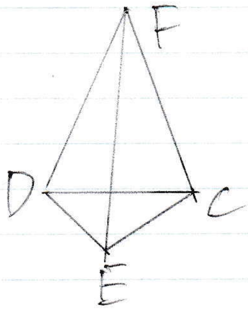


円錐　三角錐

Cavalieri の原理から
体積は底面の面積と高さから出る

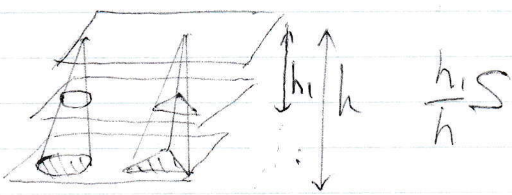






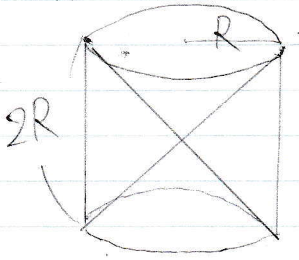
3つの三角錐
同じ体積

$$錐体 = 底面積 \times 高さ \times \frac{1}{3}$$



球の体積

円柱



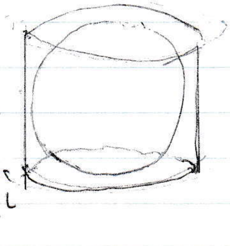
体積 $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$

円柱の中の錐体 $\left(\pi R^2 \times R \times \frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{2\pi R^3}{3}$

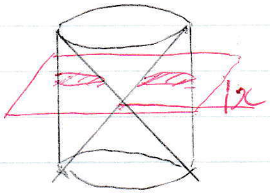
円柱 − 錐体

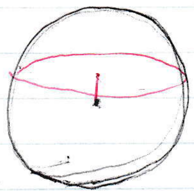
$$2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

半径Rの球



円柱から2つの錐体を除いた立体の体積
と
球の体積
が等しい。





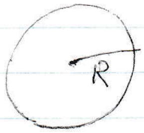
中心から x 上がったところの
平面で切る

断面の面積は
$\pi R^2 - \pi x^2$
$= \pi(R^2 - x^2)$

$\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$
$= \pi(R^2 - x^2)$

球の体積は、$\frac{4}{3}\pi R^3$

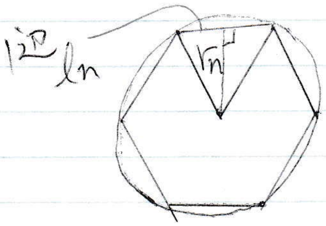
円周率とは



周 $2\pi R$ となるように決める。
面積 πR^2

Archimedes (前3C)
シラクサ
(ギリシアの植民市)

半径Rの円に内接する正n角形



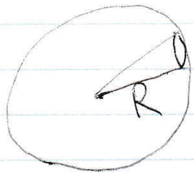
三角形ひとつ $\frac{1}{2} l_n r_n$

正n角形 $n \times \frac{1}{2} l_n r_n$
$= \frac{1}{2} \underbrace{(n l_n)}_{\to 2\pi R} \underbrace{r_n}_{\to R}$

$n \to \infty$ とする

n角形 $\longrightarrow$ 円の面積
$\frac{1}{2} n l_n r_n \longrightarrow \frac{1}{2} 2\pi R \times R = \pi R^2$

球の表面積



円：周 → 面積
球：体積 → 表面積

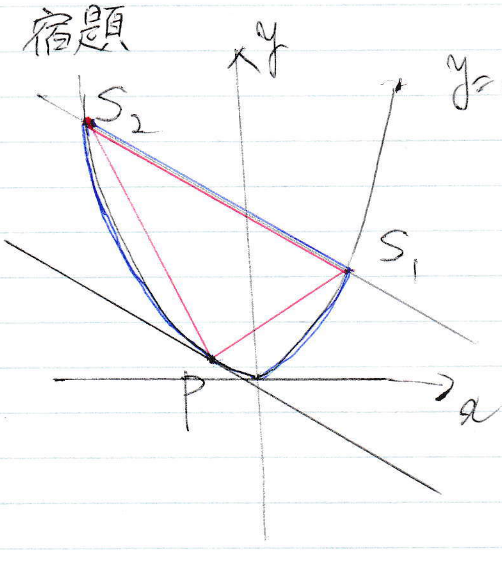
細かい錐体に分ける

$$球 = 表面積 \times R \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = X \times R \times \frac{1}{3}$$

$$X = 4\pi R^2$$

宿題



$y = ax^2 \quad (a>0)$

直線で切る．
$y = mx + n$

接線の傾きが同じとなる
接点 P

$\triangle PS_1S_2$ の面積を求めよ

放物線が切り取られた面積を求めよ．
（切片）

（切片 $= \frac{4}{3}\triangle PS_1S_2$ となる．）