微積分演習第14回

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ 2×2の行列

解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{e^{tA}}_{\text{計算}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

固有値

$|tE - A| = 0$

2次方程式

(1) 異なる2実解 α, β をもつとき

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P$$

$$e^{tA} = e^{P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P} = P^{-1} e^{t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P$$

$$e^{t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} = E + t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{6}t^3\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^3 + \cdots\cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t\alpha + \frac{1}{2}t^2\alpha^2 + \frac{1}{6}t^3\alpha^3 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t\beta + \frac{1}{2}t^2\beta^2 + \frac{1}{6}t^3\beta^3 + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}$$

(2) 複素解をもつとき

$t = a \pm bi$ (a, b: 実数, $b \neq 0$)

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P$$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ この形の行列 $\xleftrightarrow{\text{対応}}$ $a+bi$ 複素数の世界

No. 2

Date

$$e^{tA} = e^{tP^{-1}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P}$$
$$= P^{-1} e^{t\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} P$$
$$= P^{-1}\left\{ E + t\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\updownarrow\ a+bi} + \frac{1}{2}t^2\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2}_{\updownarrow\ (a+bi)^2} + \frac{1}{6}t^3\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^3}_{\updownarrow\ (a+bi)^3} + \cdots \right\} P$$

複素数のほうで
計算する。

$$e^{t(a+bi)} = e^{ta+tbi}$$
$$= e^{ta} \cdot e^{tbi} \quad (指数法則)$$
$$= e^{ta}(\cos tb + i \sin tb)$$
$$\updownarrow$$
$$e^{ta}\begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix}$$

(3) 重解 α をもつとき

$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P$ と書けるとすると、

$$A = P^{-1}(\alpha E)P = \alpha P^{-1}EP$$
$$= \alpha P^{-1}P$$
$$= \alpha E$$

元から $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

ほかのとき

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P$$

$$e^{t\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$
$$= e^{t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}} e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$t\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commute
交換可能

$e^{A+B} = e^A e^B$
とできる。

ここで

$$e^{t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}} = E + t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2}_{=0} + \frac{1}{6}t^3\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^3}_{=0} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

よって

$$e^{t\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{t\alpha}&0\\0&e^{t\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{t\alpha}&te^{t\alpha}\\0&e^{t\alpha}\end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P^{-1}\begin{pmatrix}e^{t\alpha}&te^{t\alpha}\\0&e^{t\alpha}\end{pmatrix}P$$

解は

$$\begin{cases} x = c_{11}e^{t\alpha} + c_{12}te^{t\alpha} \\ y = c_{21}e^{t\alpha} + c_{22}te^{t\alpha} \end{cases}$$ の形。

$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ はよくわからない定数

$$x' = \alpha c_{11}e^{t\alpha} + c_{12}e^{t\alpha} + \alpha c_{12}te^{t\alpha} = \bigcirc$$
$$y' = \alpha c_{21}e^{t\alpha} + c_{22}e^{t\alpha} + \alpha c_{22}te^{t\alpha} = \bigcirc$$

元の方程式をみたすことから

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ b_1 e^{t\alpha} + b_2 te^{t\alpha} = 0 \implies b_1 = b_2 = 0$$

を使って前と同様に解ける。

report

$A = \begin{pmatrix}-1&0\\2&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ のとき

微分方程式を解け。