微積分演習第12回

連立線型
微分方程式

$x(t)$
$y(t)$ $\quad A$: 2×2の行列 $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\exp tA = E + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \cdots$$

$x' = ax$ を解くと、 $x = Ce^{at}$ $\quad C$: 初期条件

定数

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

形式上解ける。 C_1, C_2: 初期条件

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 対角型のとき

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \end{cases}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix}$$

A 対角型でないが、$A = P^{-1}BP$ のとき

対角型

A: 対角化可能という

$$e^{At} = e^{(P^{-1}BP)t} = e^{P^{-1}(Bt)P} = P^{-1}e^{Bt}P$$

(Aの)

固有方程式

$$|tE-A|=0$$ （tに関する2次方程式）

$A=P^{-1}BP$ のとき，

$$|tE-A|=|tE-B|$$

$B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$

B：対角型ならば

$$|tE-B|=\begin{vmatrix}t-\alpha & 0\\ 0 & t-\beta\end{vmatrix}$$
$$=(t-\alpha)(t-\beta)$$

定理　Aの固有方程式が異なる2つの実解をもつとき，Aは対角化可能

$A=P^{-1}BP$　（Pは未知）

対角型

$$e^{tB}=\begin{pmatrix}e^{t\alpha} & 0\\ 0 & e^{t\beta}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}e^{t\alpha} & 0\\ 0 & e^{t\beta}\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x=b_{11}e^{t\alpha}+b_{12}e^{t\beta}\\ y=b_{21}e^{t\alpha}+b_{22}e^{t\beta}\end{cases}$ の形。　$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

微分し，

$$x'=\alpha b_{11}e^{t\alpha}+\beta b_{12}e^{t\beta}=a_{11}x+a_{12}y$$
$$y'=\alpha b_{21}e^{t\alpha}+\beta b_{22}e^{t\beta}=a_{21}x+a_{22}y$$

$$=a_{11}(b_{11}e^{t\alpha}+b_{12}e^{t\beta})+a_{12}(b_{21}e^{t\alpha}+b_{22}e^{t\beta})$$
$$=a_{21}(\quad〃\quad)+a_{22}(\quad〃\quad)$$

$\alpha\neq\beta$ のとき

$\forall t\in\mathbb{R},\ \lambda_1e^{t\alpha}+\lambda_2e^{t\beta}=0\implies\lambda_1=\lambda_2=0$

認める.

$$\underbrace{(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}-\alpha b_{11})}_{=0}e^{t\alpha}+\underbrace{(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}-\beta b_{12})}_{=0}e^{t\beta}=0$$

初期条件も考慮して
解が決まる.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$|tE-A|=0$ が複素数解をもつとき.
（判別式 <0）

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値を求める.

$$\left|tE-\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} t-a & b \\ -b & t-a \end{vmatrix}$$
$$= (t-a)^2+b^2$$
$$= t^2-2at+a^2+b^2 = 0$$

判別式は $a^2-(a^2+b^2)=-b^2 \leq 0$

$$t = a \pm bi$$

$|tE-A|=0$
判別式 <0
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{対応}} a+bi$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\text{対応}]{} \begin{aligned}&(a+bi)(x+yi)\\ &= (ax-by)+(ay+bx)i\end{aligned}$$

Date

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ 対応

$$(a_1+b_1 i) + (a_2+b_2 i) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2) i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ 対応

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

足し算や
掛け算が、対応している。

$$e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = E + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

のかわりに、

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi}$$ としてよい。

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 1+0i$$