微積分演習 第11回

連立線型
微分方程式

A : 2×2 の行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(\exp tA)}_{\text{これの計算}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 : \text{初期条件}$$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 対角型ならば

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= e^{\alpha t} C_1 \\ y &= e^{\beta t} C_2 \end{aligned} \quad \text{と解ける}$$

$A = P^{-1} B P$ のとき

対角型

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tP^{-1}BP} \\ &= e^{P^{-1}(tB)P} \\ &= P^{-1} e^{tB} P \end{aligned}$$

$|tE - A| = 0$

t に関する2次方程式

$$\begin{aligned} &|tE - P^{-1}BP| \\ &= |P^{-1}(tE - B)P| \\ &= |P^{-1}|\,|tE - B|\,|P| \\ &= |P^{-1}|\,|P|\,|tE - B| \\ &= |tE - B| \end{aligned}$$

B : 対角型ならば

$$\left| tE - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right| = (t-\alpha)(t-\beta)$$

定理 固有方程式が異なる2つの実解をもてば対角化可能
(認める)

目的：微分方程式を解くこと

$$P^{-1}\begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a_1 e^{t\alpha} + a_2 e^{t\beta} \\ y = a_3 e^{t\alpha} + a_4 e^{t\beta} \end{cases}$$ の形

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\alpha e^{t\alpha} + a_2\beta e^{t\beta} \\ a_3\alpha e^{t\alpha} + a_4\beta e^{t\beta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(a_1 e^{t\alpha} + a_2 e^{t\beta}) + a_{12}(a_3 e^{t\alpha} + a_4 e^{t\beta}) \\ a_{21}(a_1 e^{t\alpha} + a_2 e^{t\beta}) + a_{22}(a_3 e^{t\alpha} + a_4 e^{t\beta}) \end{pmatrix}$$

$(\forall t \in \mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{aligned} &(a_1\alpha - a_1 a_{11} - a_3 a_{12})e^{t\alpha} + (a_2\beta - a_2 a_{11} - a_4 a_{12})e^{t\beta} = 0 \\ &(a_3\alpha - a_1 a_{21} - a_3 a_{22})e^{t\alpha} + (a_4\beta - a_2 a_{21} - a_4 a_{22})e^{t\beta} = 0 \end{aligned}}$$

$\alpha \neq \beta$ のとき

$c_1 e^{t\alpha} + c_2 e^{t\beta} = 0$ が任意の t について成り立つ $\Longrightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$

（認める）

$$\begin{cases} a_1\alpha - a_1 a_{11} - a_3 a_{12} = 0 \\ a_2\beta - a_2 a_{11} - a_4 a_{12} = 0 \\ a_3\alpha - a_1 a_{21} - a_3 a_{22} = 0 \\ a_4\beta - a_2 a_{21} - a_4 a_{22} = 0 \end{cases}$$

連立方程式を解いて $a_1, \cdots, a_4$ を求める。

例

$x' = -x$

$y' = 2x - 2y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|tE - A| = (t+1)(t+2) = 0$$

$$t = -1, -2$$

$$\begin{cases} x = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} \\ y = a_3 e^{-t} + a_4 e^{-2t} \end{cases}$$ の形

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 e^{-t} - 2a_2 e^{-2t} \\ -a_3 e^{-t} - 2a_4 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 e^{-t} - a_2 e^{-2t} \\ 2(a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t}) - 2(a_3 e^{-t} + a_4 e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

$a_1 = a_3 = 0$

初期条件 c_1, c_2 を考慮に入れ、a_2, a_4 が決まる。

例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ -6x-4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |tE-A| &= \begin{vmatrix} t-5 & -3 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} \\ &= (t-5)(t+4)+18 \\ &= t^2-t-2 \\ &= (t-2)(t+1) \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = a_1 e^{2t} + a_2 e^{-t} \\ y = a_3 e^{2t} + a_4 e^{-t} \end{cases}$ の形

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 e^{2t} - a_2 e^{-t} \\ 2a_3 e^{2t} - a_4 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ -6x-4y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5(a_1 e^{2t} + a_2 e^{-t}) + 3(a_3 e^{2t} + a_4 e^{-t}) \\ -6(a_1 e^{2t} + a_2 e^{-t}) - 4(a_3 e^{2t} + a_4 e^{-t}) \end{pmatrix}$$

$a_2 = a_4 = 0$

初期条件を考慮に入れ

a_1, a_3 が決まる.