No. 1

Date '16. 6. 23

微積分演習 第10回

行列式

2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

左辺, 右辺の行列式を計算する.

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\ &\times(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}) \\ = {}& a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{12}a_{21}b_{21} \\ &-a_{12}b_{11}a_{21}b_{22} \\ &-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \\ &-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{22}) \\ = {}& (\cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} \\ &+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+\cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}}) \\ &-(\cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}}+a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \\ &+a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}+\cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}}) \end{aligned}$$

一致

$$|AB| = |A|\,|B|$$

数学的思考力を試す問題

$$\begin{cases} (A+B)+C = A+(B+C) \\ A+B = B+A \end{cases}$$

が成り立つとする。

$A_1+A_2+A_3 = A_1+(A_2+A_3)$ とする。

$A_1,\cdots,A_n$ を並びかえたものを $B_1,\cdots,B_n$ とする.
$A_1+\cdots+A_n = B_1+\cdots+B_n$ を上の2つの式のみを使って証明せよ.

たとえば

$A_1+A_2+A_3 = A_1+A_3+A_2$ を証明する

$$(\text{左辺}) = A_1 + (A_2+A_3)$$
$$= A_1 + (A_3+A_2) = (\text{右辺})$$

たとえば

$A_1+A_2+A_3 = A_3+A_1+A_2$ を証明する

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= A_3 + (A_1+A_2)\\ &= (A_3+A_1)+A_2\\ &= (A_1+A_3)+A_2\\ &= A_1+(A_3+A_2)\\ &= A_1+(A_2+A_3) = (\text{左辺})\end{aligned}$$

題意を理解し、このように感覚をつかんでから証明をする。

$|A|$: 行列式（数である）

$|AB| = |A|\,|B|$ が成り立つ

$P^{-1}AP = B$ のとき、　$(P^{-1}P = PP^{-1} = E)$

$$\begin{aligned}|P^{-1}AP| &= |B|\\ |P^{-1}|\,|A|\,|P| &= |B|\\ |P^{-1}|\,|P|\,|A| &= |B|\\ |P^{-1}P|\,|A| &= |B|\\ |E|\,|A| &= |B|\\ |A| &= |B|\end{aligned}$$

（注意 $\cancel{AB = BA}$）

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ 対角型 ならば $|B| = b_{11}b_{22}$

・固有値

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$|tE-A|=0$ をAの固有方程式という。
解を固有値という。

$$|tE-A| = \left|\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t-a_{22} \end{vmatrix}$$

tに関する
2次方程式

$$= (t-a_{11})(t-a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

$$= t^2 - (a_{11}+a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

特に、A：対角型ならば
解は $t=a_{11}, a_{22}$（対角成分）

B：対角化可能であるとする。

$$P^{-1}\underline{A}P = B$$

対角型

$$|tE-B| = |tE - P^{-1}AP|$$

$$= |P^{-1}tEP - P^{-1}AP|$$

$$= |P^{-1}(tE-A)P|$$

$$= |P^{-1}||tE-A||P|$$

$$= |P^{-1}||P||tE-A|$$

$$= |E||tE-A|$$

定理
A：与えられたとする。
$|tE-A|=0$ が異なる2実解をもつとき、
必ず対角化可能