No. 1

Date '16 6.13

# 微積分 第7回

微分

$\boxed{z = f(x, y)}$

極値

1変数

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

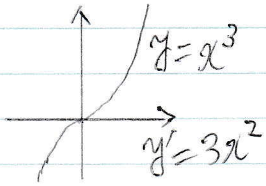
必要条件

$f'(x) = 0$

2変数

必要条件

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

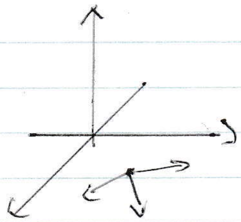



接平面が $xy$ 平面に平行になる

$x = 0$ のとき

$y' = 0$

増減表



数III

十分条件

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}\right\}$ 極小値

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}\right\}$ 極大値

高階の微分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$ 実数

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x_1, x_2)$

$y'(x_1, x_2) = f'(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ への線型写像

1×2の行列

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]$$

足し算、スカラー倍
定義される。
⟶ 列ベクトルと同じこと。

$f' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow$ ( $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ への線型写像 全体 )

$\mathbb{R}^2$

$f''(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (\qquad)$ への線型写像

$$f'(x_1, x_2) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]$$

$$\underset{\mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \longmapsto \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\, a_2$$

微分

$$f''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$(b_1, b_2) \longmapsto \underset{1\times 2}{(b_1\ b_2)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}}$$

$$\left[ b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_1) + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2},\ b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) \right]$$

1×2 の行列

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$ で微分

$f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線型写像

$m \times n$ の行列で表示できる

$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow$ ( $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線型写像 全体 )

$m \times n$ 行列全体

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

$f'(x)(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} f(x)(a_1 + a_2) = f(x)(a_1) + f(x)(a_2) \\ f(x)(\alpha a) = \alpha f(x)(a) \end{cases}$$

もう一度

$x \in \mathbb{R}^n$ で微分

$f''(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow$ ( ) への線型写像

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$f''(x)(\mathbf{a})(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^m$

<u>定理</u> $f''(x)(\mathbf{a})(\mathbf{b}) = f''(x)(\mathbf{b})(\mathbf{a})$

証明 $f'(x+ad_1)-f'(x)=f''(x)(a)d_1$ $\downarrow (b)d_2$

$$\underbrace{f'(x+ad_1)(b)d_2}_{\substack{\shortparallel \\ f(x+ad_1+bd_2) \\ -f(x+ad_1)}} - \underbrace{f'(x)(b)d_2}_{\substack{\shortparallel \\ f(x+bd_2) \\ -f(x)}} = f''(x)(a)(b)d_1d_2$$

したがって

左辺 $= f(x+ad_1+bd_2)-f(x+ad_1)-f(x+bd_2)+f(x)$

これは $a$ と $b$ を入れかえても変わらないので

$$f(x)(a)(b)=f(x)(b)(a).$$

---

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x, a \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+ad)-f(x)=f'(x)(a)d$$

$a=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1$ とおく

第1成分だけの微分

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}d\right)-f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}d$$

$a=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=e_2$ とおく

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}d\right)-f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}d$$

$f''(x)(a)(b)=f''(x)(b)(a)$ 偏微分は順序によらない

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}e_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}e_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=f''(x)(e_2)(e_1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=f''(x)(e_1)(e_2)$$