No. 1

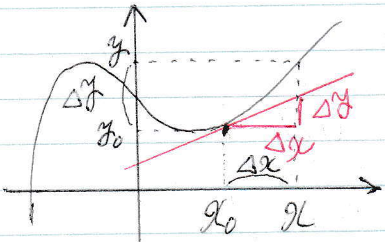
Date '16 . 6 . 6

微積分 第6回

微分をするとは？

答え. 線型化すること

まっすぐに



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0$

$= f(x) - f(x_0)$

$\Delta y = g(\Delta x)$ 複雑

関数

接線へ移ると $\Delta y = a\Delta x$ (比例)

比例定数

$f'(x_0)$

x_0における微分係数

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (mは自然数)

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} = f'(x_0)$$

$\mathbb{R}^m$の列ベクトルが定まる

$$\Delta x \mapsto f'(x_0)\Delta x$$

合成関数の微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$　$x \in \mathbb{R}^n$での微分.

$f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線型写像 ($m \times n$ 行列)

$g'(f(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ への線型写像 ($l \times m$ 行列)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

行列の言葉で言うと　掛け算
$l \times m$ 行列　$m \times n$ 行列

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$　関数
$x \in \mathbb{R}^n$で微分
$f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ への線型写像
$a \in \mathbb{R}^n$,
$f'(x)(a) \in \mathbb{R}^m$

$t \in \mathbb{R} \longmapsto f(x + at) \in \mathbb{R}^m$　を考える.

この関数は
① $t \in \mathbb{R} \longmapsto x + at \in \mathbb{R}^n$

② $y \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(y) \in \mathbb{R}^m$

合成関数である.
$t = 0$での微分……① a
② $f'(x)$

$$f(x + ad) - f(x) = \overset{\exists!}{?}\, d$$
$\in \mathbb{R}^m$

$f'(x)(a)$

No. 3

Date

$f'(x)$ が線型写像か？

$$\begin{cases} f'(x)(\alpha a) = \alpha f'(x)(a) \\ f'(x)(a_1+a_2) = f'(x)(a_1) + f'(x)(a_2) \end{cases}$$

を確かめる。

$$f(x+(\alpha a)d) - f(x) = f'(x)(\alpha a)d \quad (\forall d \in D)$$

$$\parallel$$

$$f(x + a\underbrace{(\alpha d)}_{\in D}) - f(x) = f'(x)(a)(\alpha d)$$

$$f(x+(a_1+a_2)d) - f(x) = f'(x)(a_1+a_2)d \quad (\forall d \in D)$$

$$\hookrightarrow f(x+a_1d+a_2d)$$

$$d^2=0$$

$$\begin{aligned} &= f(x+a_1d) + f'(x+a_1d)(a_2)d \\ &= f(x) + f'(x)(a_1)d + \{f'(x) + \bigcirc(a_2)d\}(a_2)d \\ &= f(x) + f'(x)(a_1)d + f'(x)(a_2)d \\ &= f(x) + \{f'(x)(a_1) + f'(x)(a_2)\}d \end{aligned}$$

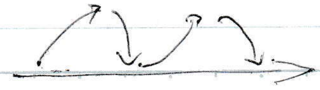
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$ で微分すると、

$f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線型写像 ($m \times n$ 行列)

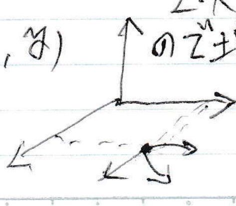
高階の微分

1変数のとき
極値を求めるのに
増減表を書いた。



2変数
$z = f(x, y)$

2次元で動く
ので増減表は
無理



増減表は無理
→ 2階の微分が必要.

極値をとるための 必要条件
$f'(x) = 0$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{極小値} \\ f''(x) < 0 & \text{極大値} \end{cases}$$

十分条件.

$f(x) = x^3$ は
$x = 0$ で 極値を
とらない