No. 1

Date '16. 5. 16

微積分 第3回

指数関数

$e > 0$

$f_e(x) = e^x$

$f_e(d) = e^d$

f_eという関数の0での微分係数

$$e^d - e^0 = a_e d \quad (\forall d \in D)$$

$$e^d = 1 + a_e d$$

f_eをxで微分

$$e^{x+d} - e^x = e^x e^d - e^x = e^x(e^d - 1) = e^x \cdot a_e d$$

指数法則

$$e^{x+d} = e^x e^d$$

$$f_e'(x) = a_e \cdot e^x$$

1となるように決める

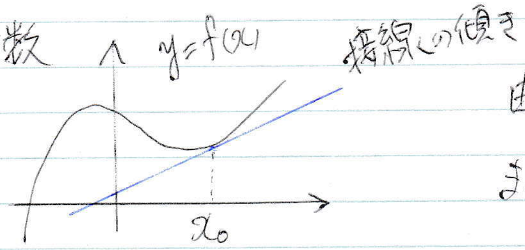
$$f_e''(x) = a_e^2 e^x$$

$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は必要ない

多変数の微分

$z = f(x, y)$

1変数

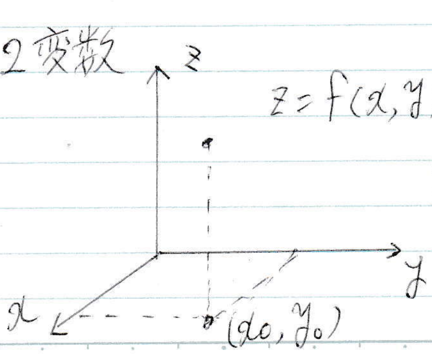


曲がっているのはイヤ

⇓

まっすぐなものでおきかえよう

2変数



$z = f(x, y)$

$z_0 = f(x_0, y_0)$

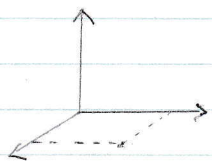
接平面

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

接平面の方程式

1変数のとき
接線は.
$y-y_0=a(x-x_0)$
$a=f'(x_0)$

$a,b\in\mathbb{R}$ を決めたい



$y=y_0$ という平面
($y=y_0$ 固定, 1変数)

$a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$
x方向の偏微分

$b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$
y方向の偏微分

2変数の場合の微分

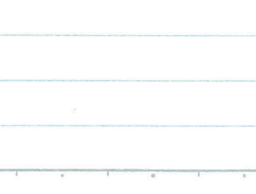
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

線形代数

3変数 $u=f(x,y,z)$　グラフは4次元
代数的に扱いたい

線形代数(Linear Algebra)
(型)

小学校
関数



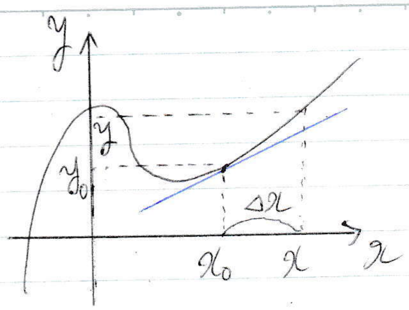
比例は1次元の線形代数

$f(x)=ax$ (aは比例定数)

性質
$f(bx)=b\,f(x)$
$f(x+y)=f(x)+f(y)$

No. 3

Date



$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0 = \varphi(\Delta x)$

接線へうつれば

$\Delta y = a \Delta x$ 比例

$a = f'(x_0)$ 微分係数

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(\alpha x) = \alpha f(x) \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

成り立つとき 線形関数 という。

1変数の線形関数

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \cdot 1) \\ &= x f(1) \\ &= ax \end{aligned}$$

比例

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) \\ &= x_1 \underbrace{f(e_1)}_{=a} + x_2 \underbrace{f(e_2)}_{=b} \\ &= a x_1 + b x_2 \end{aligned}$$

線形関数はこの形となる。

$$\left(\begin{aligned} &a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2) \\ &= \alpha (a x_1 + b x_2) \end{aligned} \right)$$

$z = f(x, y)$

$$\Delta z = z - z_0$$
$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0$$
$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$$

$u = f(x, y, z)$ のとき.

$$\Delta u = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z$$
$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$
$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$
$$c = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f(\alpha x) = \alpha f(x) \\ f(x + y) = f(x) + f(y) \end{cases}$$

線形関数

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \mathbb{e}_1 + x_2 \mathbb{e}_2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 \mathbb{e}_1 + x_2 \mathbb{e}_2) \\ &= f(x_1 \mathbb{e}_1) + f(x_2 \mathbb{e}_2) \\ &= x_1 \underbrace{f(\mathbb{e}_1)}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{f(\mathbb{e}_2)}_{\in \mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

$f(\mathbb{e}_1) = \mathbb{a}$, $f(\mathbb{e}_2) = \mathbb{b}$ と書くと,

$$f(x) = x_1 \mathbb{a} + x_2 \mathbb{b}$$

$$[\mathbb{a}, \mathbb{b}] \qquad \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{2\times 2\text{の行列}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

宿題

次の関数の x 方向, y 方向の偏微分を計算せよ.

(1) $f(x, y) = (x^2 + 2xy^2 + 3y)^4$

(2) $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$