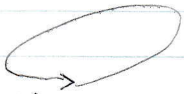
微積分 第26回

積分

閉路 γ　f: 正則関数



線積分

留数

Laurent 展開の −1 次の係数

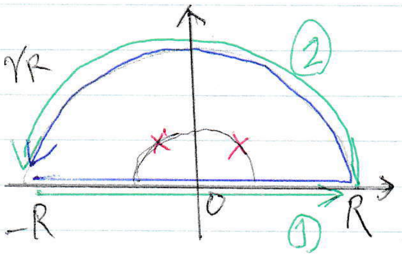
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\bigcirc + \bigcirc + \cdots)$$

留数定理

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx}$$

実数の世界での積分を
複素数の世界でやる.

$f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ とする.　半円 γ_R を作る.



$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}dz = 2\pi i(\bigcirc + \bigcirc)$$

留数

$$\| $$

$$\int_{\gamma_R{}^1} f(z)dz + \int_{\gamma_R{}^2} f(z)dz$$

①　②

$$\|$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

Date

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx \right| \leq M(b-a)$$

$|g(x)| \leq M$ なら おさえられる.

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f(z)\,dz \right| \leq M\pi R$$

$|g(z)| \leq M$ なら おさえられる

πR は道の長さ.

$$\left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| = \left| \frac{1}{z^4} \frac{z^2}{\frac{1}{z^4}+1} \right|$$

$$= \underbrace{\left| \frac{1}{z^2} \right|}_{\frac{1}{R^2}} \underbrace{\left| \frac{1}{\frac{1}{z^4}+1} \right|}_{R\to\infty \text{ で } 1 \text{ に近づく}}$$

$\frac{1}{R^2}$ ($z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ である)

したがって

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f(z)\,dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

レポート I

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \text{ を計算せよ.}}$$

今回のレポートは締切：2月13日(月)

提出先：自然B棟 2階

理学系事務室前 レポートBOX

レポートⅡ

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx \quad \text{を計算せよ}}$$

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$ を求める。

$f(z) = \frac{z^2}{z^4+z^2+1}$ として、Ⅰと同じように道をとる。

レポートⅢ

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad \text{を計算せよ}}$$

$\frac{\pi}{4a^3}$ となる。

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ を求める。

注意点、 $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$

特異点、 $z = \pm ai$ 重解

今までは、たとえば

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-\theta_1)(z-\theta_2)(z-\theta_3)(z-\theta_4)}$$

θ_1 での留数を求めるときは、

$$\frac{1}{z-\theta_1} \cdot \underbrace{\frac{z^2}{(z-\theta_2)(z-\theta_3)(z-\theta_4)}}_{\text{ベキ級数展開}}$$

$z=\theta_1$ とおく

今回は、

$$\frac{1}{(z-ai)^2}\,\frac{1}{(z+ai)^2}$$

今まで通りやると $\frac{1}{(z-ai)^2}$ の係数が出てしまう。

ほしいのは $\frac{1}{z-ai}$ の係数。

1度微分して $z=ai$ とおく。

レポートIV

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \text{ を計算せよ。} \quad (a>1)}$$

$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ となる。

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$ を求める。

$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。

$e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=\bar{z}$ （共役複素数）

すると、

$$\begin{aligned} a+\cos\theta &= a+\tfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= a+\tfrac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ &= a+\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right) \\ &= \frac{z^2+2az+1}{2z} \end{aligned}$$

となる。

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

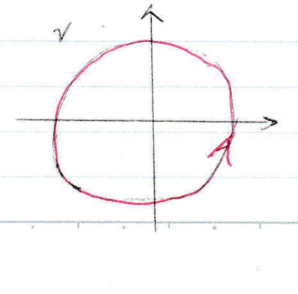
$\theta:[0,2\pi]\longrightarrow e^{i\theta}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad \cos\theta+i\sin\theta$

$$=-i\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$



No. 5

Date

レポートV

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$ を計算せよ．
$(a>1)$

◦ 特異点が重解のため，留数の求め方に注意する。