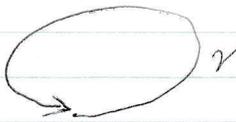


微積分 第25回

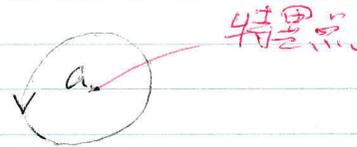
複素関数論

f: 正則

特異点のない閉路 $\int_{\gamma} f dz = 0$



特異点がある場合
たとえば a を中心 } 円 γ
半径 R



Laurent 級数 (前回)

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i (z-a)^i$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i \int_{\gamma} (z-a)^i dz$$

$$= \alpha_{-1} \int_{\gamma} (z-a)^{-1} dz$$

$$= 2\pi i \alpha_{-1}$$

留数

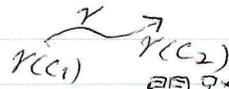
$i \neq -1$ のときは

$$(z-a)^i = \left(\frac{1}{i+1} (z-a)^{i+1} \right)'$$

原始関数

$$g' = f$$

$\gamma: [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{C}$ とすると



閉路ならば

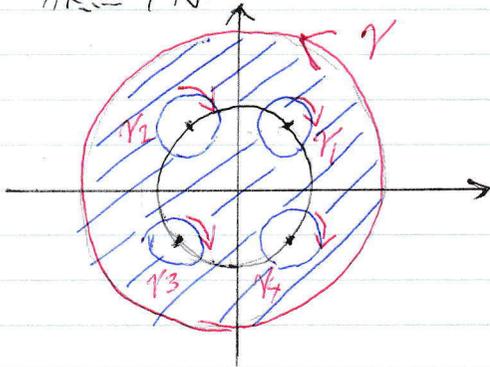
$$\gamma(c_1) = \gamma(c_2)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(c_2)) - g(\gamma(c_1))$$

$$= 0$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4+1} dz$$

γ : 半径 2
原点中心



$z^4 + 1 = 0$ の解 z
 $\theta_1, \dots, \theta_4$ となる

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$$

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4} f(z) dz = 0$$

連合軍

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \dots - \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_4} f(z) dz$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i (z - \theta_i)^i$$

$$z^4 + 1 = (z - \theta_1)(z - \theta_2)(z - \theta_3)(z - \theta_4) \quad \text{因数分解}$$

すると, $f(z) = \frac{1}{z - \theta_1} \left(\frac{z^2}{(z - \theta_2)(z - \theta_3)(z - \theta_4)} \right) = g(z)$

θ_1 のまわりで正則

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - \theta_1)^i$$

$$\begin{aligned} \text{d.7. } f(z) &= \frac{1}{z-\theta_1} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z-\theta_1)^i \\ &= \frac{\beta_0}{z-\theta_1} + \beta_1 + \beta_2 (z-\theta_1) + \beta_3 (z-\theta_1)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\beta_0 = g(\theta_1) \text{ である.}$$

($z=\theta_1$ における留数)

$z=\theta_2$ における留数も同様に

$$f(z) = \frac{1}{z-\theta_2} \frac{z^2}{(z-\theta_1)(z-\theta_3)(z-\theta_4)} = h(z)$$

として求める.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\text{○} + \text{○} + \text{○} + \text{○} \right)$$

\uparrow
 $z=\theta_1$
 における
 留数

\uparrow
 θ_2
 zの
 留数

\uparrow
 θ_3
 zの
 留数

\uparrow
 θ_4
 zの
 留数

レポート

実際には $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4+1} dz$ を計算せよ.