No. 1

Date '17. 1. 17

微積分 第24回

複素関数論

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

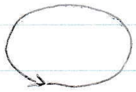
$\left.\begin{array}{l}\text{正則}\\ \text{解析}\end{array}\right\}$ 関数 を扱う.

(Cauchy-Riemannの方程式をみたす)

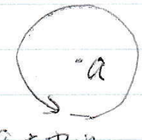
閉路

$\gamma : [a, b] \to C$

$\gamma(a) = \gamma(b)$



$$\int_\gamma f\,dz = 0$$



$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

aを中心, 円

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 2\pi i f(w)$$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-w}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)-(w-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}$$

$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$

巾級数

等比級数

$$= a_0 + a_1(w-a) + a_2(w-a)^2 + \cdots\cdots$$

Moreraの定理

複素平面全体で定義された正則関数 f について

$|f| \leq M \implies f = C$

代数学の基本定理

（代数的証明もあるが、難しい Gauss）

$x^2+1=0$ は実数解はない。
複素数では
$x^2+1=(x+i)(x-i)$ 1次式に因数分解できる。
解．$x=\pm i$

［定理］
$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$
は複素数解をもつ。

［証明］
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 z + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0,\ n \geq 1)$
が解をもたないと仮定する。（背理法）

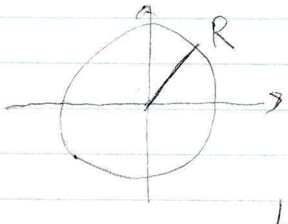
$\dfrac{1}{f(z)}$ は正則．

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0}$$

$$= \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots\cdots + a_0 \frac{1}{z^n}}$$

絶対値をとることを考える

$$|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq M_1$$



$$|f(z)| \leq M_2$$

$$|f(z)| \leq Max(M_1, M_2)$$

Morera の定理より
$f(z) = c$（定数）．
仮定に反する。//

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

複素数のかけ算

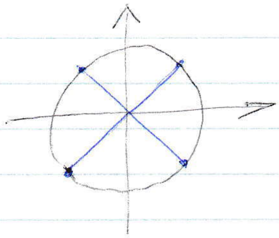
$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

$1+z^4=0$ となる点を求める.

$1+(z^2)^2 = 0$

$z^2 = \pm i$



$z^2 = \pm i$ より, $|z|=1$ (単位円上)

$z^2 = i$

- $2\arg z = \frac{\pi}{2}$
  $\arg z = \frac{\pi}{4}$
- $2\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi$
  $\arg z = \frac{5}{4}\pi$

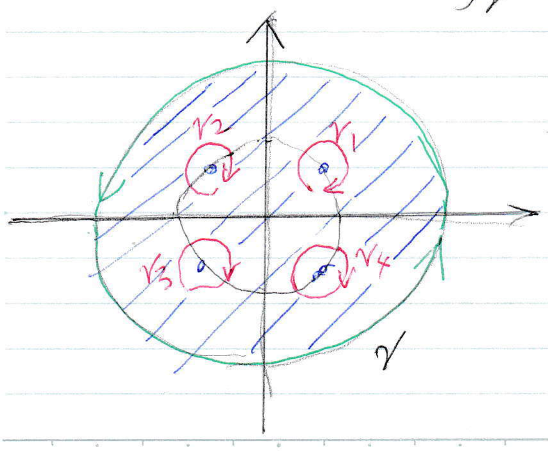
$z^2 = -i$

- $2\arg z = \frac{3}{2}\pi$
  $\arg z = \frac{3}{4}\pi$
- $2\arg z = \frac{3}{2}\pi + 2\pi$
  $\arg z = \frac{7}{4}\pi$

$1+z^4=0$ となるのは 以上4つの点。

原点中心 半径2 } 円 γ

$\int_\gamma f(z)\,dz$ を計算する.



内部に特異点は4つ.
そこを中心に 小さな円 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ を作る.

$\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ 連合軍

囲まれる部分は 正則

(向きは 内部を左手に見る向き)

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_3} f(z)\,dz - \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

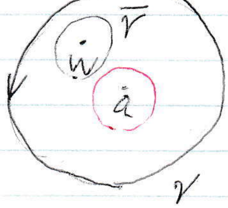
したがって. $$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

aを中心、半径R } 円γを考える.

$f(z)$は aが特異点、ほかでは正則とする.

aのほかに円の内部にwをとり.

wを含む小円板 $\bar{\gamma}$ をとる.



$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{z-w}$$

aを中心、半径r } 円γ' を考える。(小さい円)

$\gamma\cup\bar{\gamma}\cup\gamma'$ において.

$$\int_{\gamma\cup\bar{\gamma}\cup\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{\bar{\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = 0$$

$$\int_{\bar{\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z-w}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-w}}_{①} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z-w}}_{②}$$

① $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)-(w-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)} \qquad \left|\frac{w-a}{z-a}\right|<1$$

$$= a_0 + a_1(w-a) + a_2(w-a)^2 + \cdots\cdots$$

② $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)-(w-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{\left(\frac{z-a}{w-a}-1\right)(w-a)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(z)\,dz}{\underbrace{\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}_{\text{等比級数}}(w-a)} \qquad \left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{w-a}\int_{\gamma'} f(z)dz + \frac{1}{(w-a)^2}\int_{\gamma'} f(z)(z-a)\,dz + \frac{1}{(w-a)^3}\int_{\gamma'} f(z)(z-a)^2dz + \cdots\cdots\right\}$$

$$= -\left\{a_{-1}(w-a)^{-1} + a_{-2}(w-a)^{-2} + \cdots\cdots\right\}$$

Laurent 展開