No. 1

Date '16.12.19

微積分 第23回

微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$df = f' dx$

f': 微分係数

複素数 $z = x + iy$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + (-i) \frac{\partial f}{\partial y} i\, dy$$

$dz = dx + i dy$

$$\boxed{df = g\, dz}$$

$\exists g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = (-i) \frac{\partial f}{\partial y}}$$

必要十分

$f = f_1 + i f_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}}$$

Cauchy-Riemann の方程式

Cauchy-Riemann の方程式を満たす関数.
正則関数(解析関数)という。正則関数を対象にする

微分係数 $\frac{\partial f}{\partial x}$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$d(f\,dz) = 0$

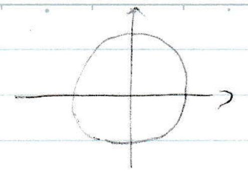
$d(f'\,dz) = 0$

$f+g$, fg, f/g もまた正則

e^z, $\sin z$, $\cos z$ も正則

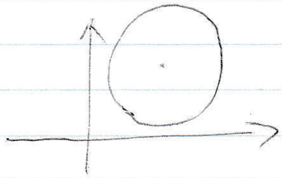
積分定理

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$



中心 原点
半径 r

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$



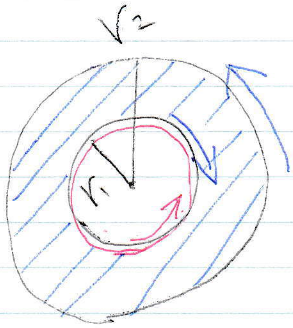
中心 a
半径 r

f : 正則 $(r>0)$

$$F(r) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$ とする.

命題 : $0<r_1<r_2$

$$F(r_1) = F(r_2)$$



内部を左手に見る向き

$\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}$ 連合軍を考える

$$\int_{\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0$$

正則

$$-\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz + \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0$$

命題は示された.

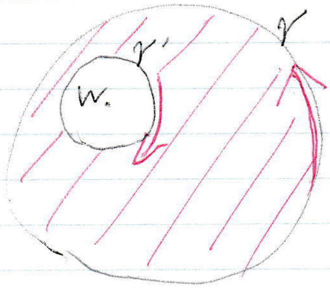
$$\gamma_r : [0, 2\pi] \ni \theta \longmapsto a + r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+r(\cos\theta+i\sin\theta))}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} \frac{dz}{d\theta}\, d\theta$$

$$G(r) \Longleftarrow = \boxed{\int_0^{2\pi} \frac{f(a+r(\cos\theta+i\sin\theta))}{\cancel{r}(\cos\theta+i\sin\theta)} \cancel{r}(-\sin\theta+i\cos\theta)\, d\theta}$$

$G(r)$ は $r=0$ でも定義できて、 $2\pi i f(a)$

Cauchy の積分定理



f: 正則

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz}$$

$\gamma \cup \gamma'$ を考える

$$\int_{\gamma\cup\gamma'} \frac{f(z)}{z-w}dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz - \underbrace{\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z-w}dz}_{=2\pi i f(w)} = 0$$

より成り立つ。

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{(z-a)-(w-a)}$$

$$= \frac{f(z)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}$$

等比級数の公式を使う

$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$

$$= \frac{f(z)}{z-a}\left\{1+\frac{w-a}{z-a}+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{f(z)}{z-a}+\frac{f(z)}{(z-a)^2}(w-a)+\frac{f(z)}{(z-a)^3}(w-a)^2$$

$$+\frac{f(z)}{(z-a)^4}(w-a)^3+\cdots\cdots$$

よって

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz = \underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz}_{a_0} + (w-a)\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz}_{a_1}$$

$$+ (w-a)^2\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz}_{a_2} + (w-a)^3\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^4}dz}_{a_3} + \cdots\cdots$$

多項式で書ける

代数学の基本定理

$x^2+1=0$ は実数では解はない。
複素数では $z^2+1=0$ 。 $z=\pm i$

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n = 0$
複素数では解をもつ

Morelaの定理
複素平面全体で定義された正則関数 f について
$|f| \leq M \Rightarrow f = C$

$$a_1 = \int \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(\cos\theta + i\sin\theta)}{r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2}\underbrace{\boxed{\frac{dz}{d\theta}}}_{r(-\sin\theta + i\cos\theta)}d\theta$$

絶対値をとって、
$r\to\infty$ を考えてみよう

$$\left|\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{f(\cdots\cdots)}{\cdots\cdots}(\cdots\cdots)d\theta\right|$$

$a_1=0$。 $a_2, a_3, \cdots$ も同様。