No. 1

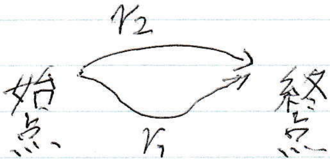
Date '16. 11. 21

微積分 第20回

保存力

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ 力の場

線積分. 仕事

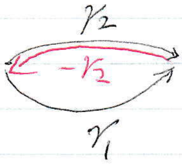


一般に $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \neq \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$

保存力であれば

閉路 γ については $\int_{\gamma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

閉路で線積分が 0 ならば



$$\int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{f}$: 保存力である.

命題 $\boldsymbol{f}$: 保存力 $\Longleftrightarrow$ ($\exists \varphi$: スカラー場) $\underline{(\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\, \varphi)}$

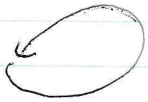
積分

$$\boxed{\text{実用的命題} \quad \boldsymbol{f} : \text{保存力} \Longleftrightarrow \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = 0}$$

証明

$\Longrightarrow$ $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \varphi) = 0$ (前回より)

$\Leftarrow$ 閉曲線 γ



$\int_\gamma \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} = 0$ を示す

閉曲線 γ をふちとする曲面 Σ がある

(物理的証明
石けん水につけて膜をはる。)

$$\int_\gamma \mathbb{f} \cdot d\mathbb{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\, \mathbb{f}) \cdot d\mathbb{S} = 0$$

回転定理

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ナブラ
nabla

$$\begin{array}{ccccccc} & \nabla\varphi & & \nabla\times\mathbb{f} & & \nabla\cdot\mathbb{f} & \\ \text{スカラー場} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{ベクトル場} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{スカラー場} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{0次の微分形式} & \xrightarrow{d} & \text{1次の微分形式} & \xrightarrow{d} & \text{2次の微分形式} & \xrightarrow{d} & \text{3次の微分形式} \end{array}$$

ベクトル場

$$\mathbb{f} = f_1 \mathbb{e}_1 + f_2 \mathbb{e}_2 + f_3 \mathbb{e}_3 \qquad f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

基底

$\updownarrow$

$$f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

(1次の交代形式
基底

$dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_1$

$dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_2$

$dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_3$

ベクトル場

$$f = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

$$\updownarrow$$

$$f_1\, dy\wedge dz + f_2\, dz\wedge dx + f_3\, dx\wedge dy$$

2次の交代形式
基底 $dy\wedge dz$
$dz\wedge dx$
$dx\wedge dy$

スカラー場

$$\varphi \longleftrightarrow \varphi\, dx\wedge dy\wedge dz$$

3次の交代形式
基底 $dx\wedge dy\wedge dz$

φ 0次の微分形式

$$d\varphi = \varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)dz$$

1次の交代形式 w_1, w_2

$$(w_1\wedge w_2)(a, b) = w_1(a)w_2(b) - w_1(b)w_2(a)$$

$\boxed{w_1 = w_2 \text{ ならば } w_1\wedge w_2 = 0}$

$\boxed{w_1\wedge w_2 = -w_2\wedge w_1}$

なぜなら

$$0 = (w_1+w_2)\wedge(w_1+w_2) = \underbrace{w_1\wedge w_1}_{0} + w_1\wedge w_2 + w_2\wedge w_1 + \underbrace{w_2\wedge w_2}_{0}$$

ベクトル場 $f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$

$\updownarrow$

$$d\left(f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \right)$$

$$= (df_1)\wedge dx + (df_2)\wedge dy + (df_3)\wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx + (\qquad\qquad)\wedge dy + (\qquad\qquad)\wedge dz$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{\partial f_1}{\partial x}\underset{0}{dx\wedge dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\underset{-dx\wedge dy}{dy\wedge dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dx \\
& + \frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial y}\underset{0}{dy\wedge dy} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\underset{-dy\wedge dz}{dz\wedge dy} \\
& + \frac{\partial f_3}{\partial x}\underset{-dz\wedge dx}{dx\wedge dz} + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy\wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial z}\underset{0}{dz\wedge dz}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz + (\qquad)\,dz\wedge dx + (\qquad)\,dx\wedge dy$$

$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$

$\updownarrow$

$$f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \xrightarrow{d} (\qquad)\,dy\wedge dz + (\qquad)\,dz\wedge dx + (\qquad)\,dx\wedge dy$$

回転を計算している

report I

上の計算を補って d がベクトル場の言葉では 回転を計算していることを確かめよ.

ベクトル場

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

$$\updownarrow$$

2次の微分形式

$$f_1\, dy\wedge dz + f_2\, dz\wedge dx + f_3\, dx\wedge dy \xrightarrow{\ d\ } df_1\wedge dy\wedge dz + df_2\wedge dz\wedge dx + df_3\wedge dx\wedge dy$$

3個

ここで

$$w_1\wedge w_2\wedge w_3 = -w_1\wedge w_3\wedge w_2$$ （入れかえるとマイナス）

$$w_1\wedge w_1\wedge w_3 = 0$$ （同じものがあると 0）

である。

df_1, df_2, df_3 を書き直して計算を進めると、

◯ $dx\wedge dy\wedge dz$ の形になる

report II

> 上の計算を行って、d がベクトル場の言葉では div になっていることを確認せよ

数Ⅱ　多項式の微積分
数Ⅲ　sin, cos, 指数関数 などの 微積分

$$f(x) = \sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

無限次の
多項式

$$a_0 = f(0)$$
$$a_1 = f'(0)$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

と係数を求められる。

指数関数の場合

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

$(e^x)' = e^x$ である。

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{3!}$$
$$\vdots$$

したがって　$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

report Ⅲ

sin x, cos x を無限次の多項式で表せ