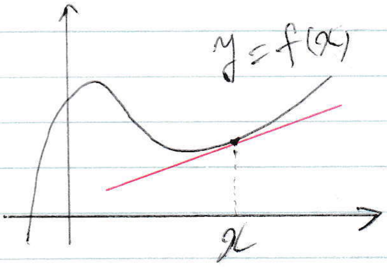
No. 1

Date '16 . 5 . 9

微積分 第2回



平均変化率

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

これは19C以降の微分

17C Newton
18C Lagrange, Euler

$\}$ hが十分小さければ曲線と接線が一致

$$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$(\exists! a \in \mathbb{R})(\forall d \in D) \quad f(x+d) = f(x) + a d$$

$f'(x)$

公式

$$\boxed{\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \end{aligned}}$$

report I

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする.

$(\alpha f)' = \alpha f'$ を示せ.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$ とする.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$ を示せ.

(ii)のやり方

$$\frac{f(x+d)}{g(x+d)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sim\sim\sim}{g(x+d)\,g(x)}$$

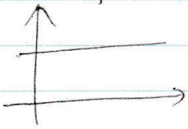
$$= \frac{\sim\sim\sim}{(g(x) + g'(x)d) \cdot g(x)}$$

分母・分子に $g(x) - g'(x)d$ をかける.

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

具体的な関数

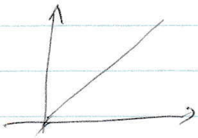
- $f(x) = c$ （定数）



$$f(x+d) - f(x) = c - c$$
$$= 0$$
$$= 0 \cdot d$$

よって $f'(x) = 0$

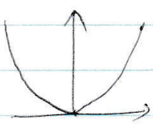
- $f(x) = x$



$$f(x+d) - f(x) = x + d - x$$
$$= d$$
$$= 1 \cdot d$$

よって $f'(x) = 1$

- $f(x) = x^2$



$$f(x+d) - f(x) = (x+d)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2dx + d^2 - x^2$$
$$= 2x \cdot d$$

よって $f'(x) = 2x$

- $f(x) = x^3$

$$f(x+d) - f(x) = (x+d)^3 - x^3$$
$$= x^3 + 3x^2 d + 3x\underbrace{d^2}_{\fallingdotseq 0} + \underbrace{d^3}_{\fallingdotseq 0} - x^3$$
$$= 3x^2 \cdot d$$

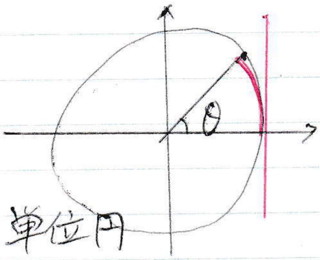
よって $f'(x) = 3x^2$

report Ⅱ

$\boxed{f(x) = x^7 \text{ を微分せよ}}$

$(f+g)' = f' + g'$
$(\alpha f)' = \alpha f'$ から 多項式関数は
微分できる。

三角関数



radian (ラジアン)

角度(開き)を円弧の長さではかる。

$\theta = d \in D$ とすると 接線と円弧は
一致

$$\begin{cases} \sin d = d \\ \cos d = 1 \end{cases}$$

$$\sin^2 d + \cos^2 d = d^2 + 1^2$$
$$= 0 + 1 = 1.$$

sinの微分

$$\sin(x+d) = \sin x \underbrace{\cos d}_{1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{d}$$
$$= \sin x + d \cos x$$

よって
$$(\sin x)' = \cos x$$

cosの微分

$$\cos(x+d) = \cos x \underbrace{\cos d}_{1} - \sin x \underbrace{\sin d}_{d}$$
$$= \cos x - d \sin x$$

よって
$$(\cos x)' = -\sin x$$

指数関数

$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$ は本来見せなくてもよい

$f(x) = 10^x$

$f(d) - f(0) = 10^d - 1 = {}^{\exists !} a d$

$g(x) = e^x$ （10 を $e > 0$ にかえる）

$= (10^{\log_{10} e})^x$

$= 10^{(\log_{10} e) x}$

$\alpha \in \mathbb{R},\ d \in D$
$\Longrightarrow \alpha d \in D$

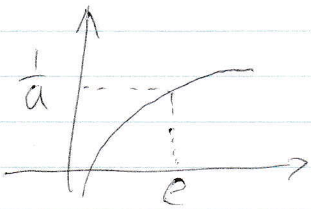
$g(d) - g(0) = 10^{(\log_{10} e) d} - 1$

$= (1 + a (\log_{10} e) d) - 1$

$= a (\log_{10} e) d$

$g'(0) = a \log_{10} e$

$h(e) = \log_{10} e$ のグラフ



$\log_{10} e = \frac{1}{a}$ となる e がある

$g'(0) = 1$ となるように e を決める.

$$\begin{aligned} e^{x+d} - e^x &= e^x e^d - e^x \\ &= e^x (e^d - 1) \\ &= e^x (1 + d - 1) \\ &= e^x d \end{aligned}$$

$e^d = e^0 + g'(0) d$
$= 1 + d$

$g'(x) = e^x$