No. 1

Date '16.11.14

微積分第19回

積分定理

回転定理

ベクトル場 f

曲面 Σ

$$\int_{\partial\Sigma} f\cdot dr = \int_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, f)\cdot dS$$

曲線　線積分　面積分

発散定理 (Gauss)

ベクトル場 f

閉曲面 Σ

囲まれる領域 Ω

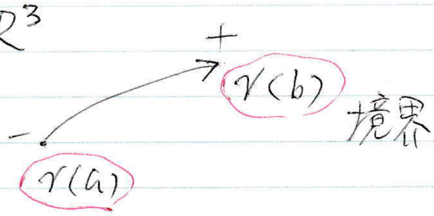
$$\int_{\Sigma} f\cdot dS = \int_{\Omega} (\mathrm{div}\, f)\, dV$$

面積分　体積分

勾配定理

スカラー場 φ

曲線 $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$



$$\varphi(r(b)) - \varphi(r(a))$$

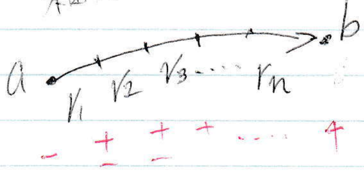
点積分

$$= \int_{r} (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot dr$$

線積分

無限小のlevelで
成り立つように決める

細分



$$\int_{r} (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot d\mathbf{r}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{r_i} (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot d\mathbf{r}$$
$$= \varphi(r(b)) - \varphi(r(a))$$

無限小で成り立てばよい。

$x \xrightarrow{da} x+da$

$$\varphi(x+da)-\varphi(a) = g\cdot ad$$

点積分

$a \in \mathbb{R}^3$
$d \in D$

多変数の微分 $\varphi'(x)(a)d$

$\varphi'(x)$ は線型写像。
1次の交代形式

基底は $dx : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto b_1$

$dy : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto b_2$

$dz : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto b_3$

よって $(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz)(a)$ と書ける。

$= g_1 a_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3$

g_1 を出すには $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすればよい。

つまり $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$

求めたい g は、$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$

$$\text{スカラー場} \xrightarrow{\text{grad}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{rot}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{div}} \text{スカラー場}$$

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)_{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{f})_{(x)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

スカラー場 φ とする.

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$ を計算してみる.

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}$$

偏微分は順序によらない

例. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longleftrightarrow x^3y^2z^4$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}(x) = \frac{\partial}{\partial z}(2x^3yz^4) = 8x^3yz^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}(x) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2z^3) = 8x^3yz^3$$

report

ベクトル場 f

div (rot f) を計算し. 0 になることを確かめよ.

そのこころは……

$$\underset{\text{ナブラ}}{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

作用素を並べたベクトル(のようなもの)

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi$$ スカラー倍

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla\times\boldsymbol{f}$$ ベクトル積

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \nabla\cdot\boldsymbol{f}$$ 内積

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$ は $\nabla\times(\nabla\varphi) = (\nabla\times\nabla)\varphi$

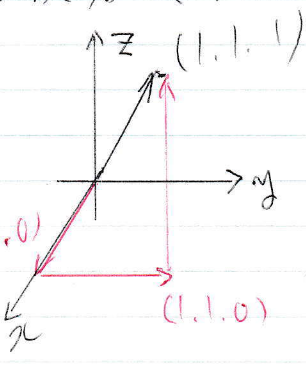
ベクトル積の性質で $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})$ は $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) = 0$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は平行六面体の体積。

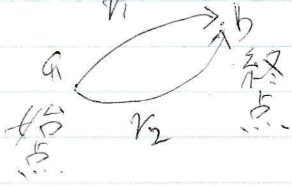
つぶれてしまう。

線積分(一般に、始点と終点だけでは決まらない)



ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ とする

勾配定理が成り立つ.



$$\int_{r_1} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a})$$

$$\parallel$$

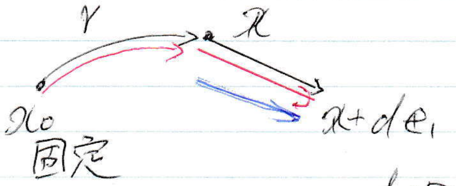
$$\int_{r_2} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a})$$

grad で作られたベクトル場のときは始点と終点だけで決まる。

逆に、ベクトル場 $\mathbf{f}$ があり、線積分が始点と終点だけで決まるとする。

（このような $\mathbf{f}$ を保存力という）

スカラー場 φ があって $\mathbf{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と書けることを示す。



$$\varphi(x) = \int_\gamma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$ と定義。

$d \in D$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x+de_1) - \varphi(x) = f_1(x)\,d$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = f_1(x)$$ である。

f_2, f_3 も同様