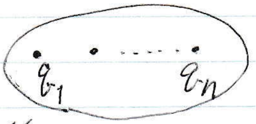
No. 1

Date '16. 11. 8

微積分 第18回

積分定理

Gaussの発散定理（数学）
クーロンの法則（物理）
$\Big\} \Longrightarrow$ Gaussの法則（物理）



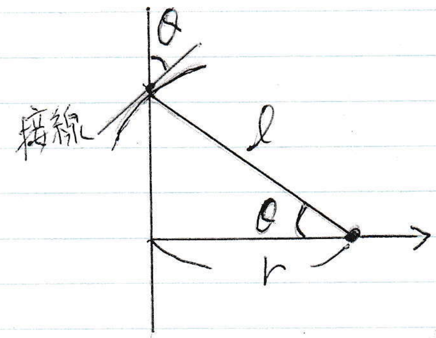
閉曲面 Σ
電場 f

離散的分布

$$\int_{\Sigma} f\, dS = 4\pi k(q_1 + \cdots + q_n)$$

連続的分布も
同様に成り立つ.

空間に無限に延びた針金を考える.
一様に単位長さあたり ρ の電荷が分布（電荷密度 ρ）



$$l\, d\theta = \frac{r\, d\theta}{\cos\theta}$$

$$(l\, d\theta)\cos\theta = \frac{r\, d\theta}{\cos\theta}\cos\theta = r\, d\theta$$

電荷は $\rho r\, d\theta$

$$\frac{\rho r\, d\theta}{l^2} = \frac{\rho\cos^2\theta}{r^2} r\, d\theta = \frac{\rho\cos^2\theta}{r} d\theta$$

全体では $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\cos^2\theta}{r} d\theta = \frac{2\rho}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$

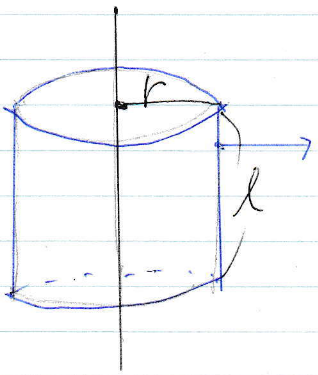
$$= \frac{2\rho}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta$$

$$= \frac{\rho}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{r}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\rho}{r}\frac{\pi}{2}$$

Gaussの法則から出すと…
円筒の面積分を考える



円弧の長さ　$2\pi r$
側面の面積　$(2\pi r)l$
受ける力　$(2\pi r)lf$

内部の電荷
$4\pi k l\rho$

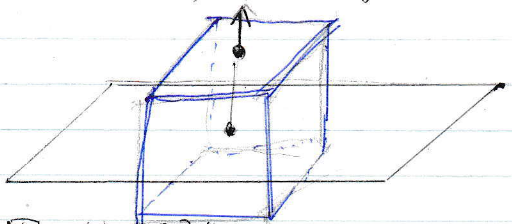
$$4\pi k l\rho = 2\pi r l f$$

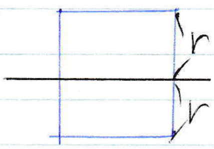
$$f = \frac{2k\rho}{r}$$

※上下の面は
面に沿った向き。
面積分には影響しない

report I

無限に延びた平面を考える
単位面積あたり ρ の電荷が一様に分布。
どのような電場が生じるか。





図のような閉曲面を考えよ。
側面は面に沿う向き。
上下の面だけ考えればよい

report II

空間に半径aの球面があるとする.
単位面積あたりρの電荷が一様に分布.
どのような電場が生じるか

微分形式

1次の交代形式
全体は3次元
基底 $dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_1$

$dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_2$

$dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_3$

2次の交代形式
全体は3次元
基底 $dy \wedge dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$dz \wedge dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

$dx \wedge dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

2つの1次の交代形式 φ, ψ
$(\varphi \wedge \psi)(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \underset{\text{定義}}{=} \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a})$ とする。
くさび形積 wedge product

2次の交代形式であることを確かめる.

$$(\varphi\wedge\psi)(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2, \mathbb{b}) = \varphi(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)$$
$$= (\varphi(\mathbb{a}_1)+\varphi(\mathbb{a}_2))\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})(\psi(\mathbb{a}_1)+\psi(\mathbb{a}_2))$$
$$= \{\varphi(\mathbb{a}_1)\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a}_1)\} + \{\varphi(\mathbb{a}_2)\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a}_2)\}$$
$$= (\varphi\wedge\psi)(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}) + (\varphi\wedge\psi)(\mathbb{a}_2, \mathbb{b})$$

$\mathbb{b}$についても同様.

$$(\varphi\wedge\psi)(\alpha\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \varphi(\alpha\mathbb{a})\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\alpha\mathbb{a})$$
$$= \alpha\varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\alpha\psi(\mathbb{a})$$
$$= \alpha\{\varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a})\}$$
$$= \alpha(\varphi\wedge\psi)(\mathbb{a}, \mathbb{b})$$

$\mathbb{b}$についても同様.

よって二重線型.

交代性は $(\varphi\wedge\psi)(\mathbb{b}, \mathbb{a}) = \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a}) - \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b})$
$= -(\varphi\wedge\psi)(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

report III

φ, ψ, χ を1次の交代形式とする.

$$(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}) = \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{b})\chi(\mathbb{c}) + \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{c})\chi(\mathbb{a}) + \varphi(\mathbb{c})\psi(\mathbb{a})\chi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{a})\psi(\mathbb{c})\chi(\mathbb{b}) - \varphi(\mathbb{b})\psi(\mathbb{a})\chi(\mathbb{c}) - \varphi(\mathbb{c})\psi(\mathbb{b})\chi(\mathbb{a})$$

と定義する.

三重線型
交代性

を確かめよ.