No. 1

Date '16 · 10 · 31

微積分第17回

積分定理
使い方

発散定理
Σ：閉曲面
Ω：囲まれる領域
ベクトル場 $\mathbf{f}$

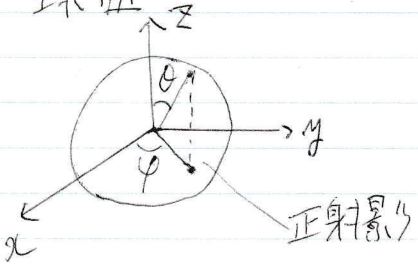
$$\boxed{\underbrace{\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{f})\, dV}_{\text{体積分}}}$$

$\mathbb{r} \to \mathbb{r}$

$(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ というベクトル場を考える.

$\operatorname{div} \mathbb{r} = 1 + 1 + 1 = 3$
定値関数

原点中心 半径 a
球面



極座標 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$r = a$
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

以前. 面積分を計算したが.
今は定理を知っているので

$$3 \underbrace{\boxed{\int_{\Omega} 1\, dV}}_{\Omega\text{の体積}} = 3 \times \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

静電場

電荷 q ・———・ $\mathbb{r}$

原点

万有引力 $G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

クーロン力 $k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

点 $\mathbb{r}$ の電荷が受ける力は. $kq\dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3}$

$\dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|} \cdot \dfrac{1}{|\mathbb{r}|^2}$

$\dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3}$ の発散

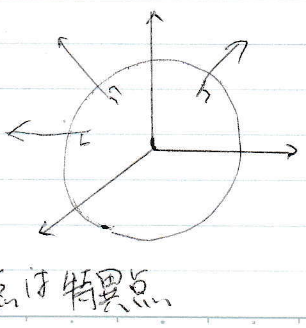
$$|\mathbb{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\ z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \end{pmatrix}$$

発散を計算

$$\begin{array}{rl} & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\ & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\ +) & (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \\ \hline & 0 \end{array}$$

原点中心. 半径 a の球面 Σ を考えると…



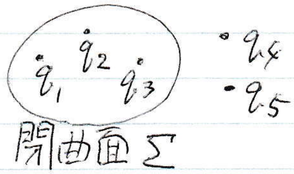
$$k\frac{q}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi kq$$

0 にならない
(a によらない)

原点は特異点.

◎ Σ で囲まれた全体で
ベクトル場が定義されていないといけない。
特異点, 1点, のためにくずれる。

電荷がたくさんある場合



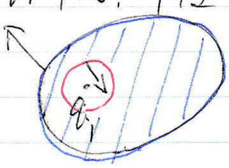
重ね合わせの原理

電場 $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$

q_1だけで生じる電場

$$\int_\Sigma f\,dS = \underbrace{\int f_1\,dS}_{\text{内部の特異点は隔離する}} + \cdots\cdots + \underbrace{\int f_5\,dS}_{\text{外部の点なので}0}$$

q_1中心、半径εの球面Σ_1を考える。(隔離)

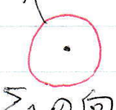


$\Sigma \cup \Sigma_1$では

$$\int_{\Sigma\cup\Sigma_1} f_1\cdot dS = 0$$

$$\| $$

$$\int_\Sigma f_1\cdot dS \underset{\text{マイナス}}{-} \int_{\Sigma_1} f_1\cdot dS$$



Σ_1の向き

よって、

$$\int_\Sigma f_1\,dS = \int_{\Sigma_1} f_1\,dS = 4\pi k q_1$$

したがって、電場全体では

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k q_1 + 4\pi k q_2 + 4\pi k q_3 + 0 + 0$$

$$= 4\pi k (q_1 + q_2 + q_3)$$

内部の電荷を足せばよい。　Gaussの法則

report 問題

$\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ の発散は 0。　逆2乗の法則という。

$\parallel$

$\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \dfrac{1}{|\mathbf{r}|^{2}}$ 逆2乗のときのみ

発散が0となることを示せ。