微積分 第16回

積分定理

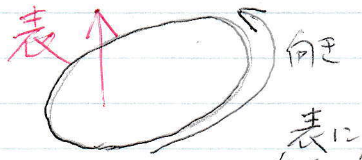
回転定理

ベクトル場 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
曲面 Σ
Σの境界 $\partial\Sigma$

$$\int_\Sigma (\mathrm{rot}\, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

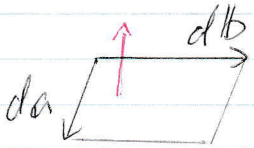
$a \rightleftarrows b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$



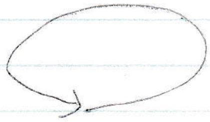
表に旗を立てて、
左手に旗が見えるように
向きをつける.

無限小のlevelで成り立つ
ように rot $\mathbf{f}$ を決める.

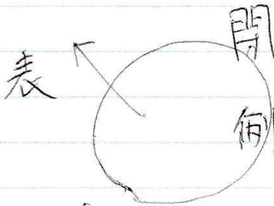


[前回の内容
参照]

閉曲線



閉曲面



例:球面

向きは
外側を表にする

発散定理

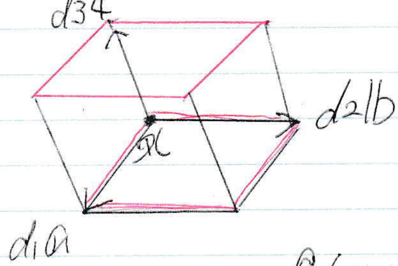
ベクトル場 $\mathbf{f}$
閉曲面 Σ
囲まれる領域 Ω

$$\int_\Omega \underbrace{(\mathrm{div}\, \mathbf{f})}_{\text{スカラー場}} dV = \int_\Sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

体積分　　　　面積分

成り立つように div を決める
無限小のlevelで成り立てばよい

Date



面積分

平行六面体を考える

閉曲面

$$f(\mathbf{x}+d_3\mathbf{c})\cdot(d_1\mathbf{a}\times d_2\mathbf{b}) - f(\mathbf{x})\cdot(d_1\mathbf{a}\times d_2\mathbf{b})$$

$$f(\mathbf{x}+d_2\mathbf{b})\cdot(d_3\mathbf{c}\times d_1\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})\cdot(d_3\mathbf{c}\times d_1\mathbf{a})$$

$$+)\ f(\mathbf{x}+d_1\mathbf{a})\cdot(d_2\mathbf{b}\times d_3\mathbf{c}) - f(\mathbf{x})\cdot(d_2\mathbf{b}\times d_3\mathbf{c})$$

足し合わせる.

ここで, 1番上の式は $\{f(\mathbf{x}+d_3\mathbf{c})-f(\mathbf{x})\}\cdot(d_1\mathbf{a}\times d_2\mathbf{b})$
$=(f'(\mathbf{x})(\mathbf{c})d_3)\cdot(d_1\mathbf{a}\times d_2\mathbf{b})$

同様に, 2番目の式は $(f'(\mathbf{x})(\mathbf{b})d_2)\cdot(d_3\mathbf{c}\times d_1\mathbf{a})$
3番目の式は $(f'(\mathbf{x})(\mathbf{a})d_1)\cdot(d_2\mathbf{b}\times d_3\mathbf{c})$

よって, 計算すると

$$\{\underbrace{f'(\mathbf{x})(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+f'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+f'(\mathbf{x})(\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}\}d_1d_2d_3$$

$=\varphi(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ とする. ($\mathbf{x}$は固定)

$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ とおく.

$$\varphi(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$
$$=\underbrace{f'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)}_{f'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_1)+f'(\mathbf{x})(\mathbf{a}_2)}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+f'(\mathbf{x})(\mathbf{b})\cdot\underbrace{(\mathbf{c}\times(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2))}_{\mathbf{c}\times\mathbf{a}_1+\mathbf{c}\times\mathbf{a}_2}+f'(\mathbf{x})(\mathbf{c})\cdot\underbrace{((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b})}_{\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}}$$

$$=\varphi(\mathbf{a}_1,\mathbf{b},\mathbf{c})+\varphi(\mathbf{a}_2,\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Date

report 問題

(1) $\varphi(\alpha a, b, c) = \alpha \varphi(a, b, c)$ を示せ

b, c についても同様のことが成り立つ。
三重線型であるとわかる。

次に、a と b を入れかえ。

$$\varphi(b, a, c)$$
$$= f'(x)(b)\cdot(a \times c) + f'(x)(a)\cdot(c \times b) + f'(x)(c)\cdot(b \times a)$$
$$- f'(x)(b)\cdot(c \times a) \quad - f'(x)(a)\cdot(b \times c) \quad - f'(x)(c)\cdot(a \times b)$$
$$= -\varphi(a, b, c)$$

report 問題

(2) $\varphi(a, c, b) = -\varphi(a, b, c)$ を示せ。

3次の交代形式だとわかる。
全体は1次元の線型空間。$\underbrace{\beta}_{\text{スカラー}} V(a, b, c)$ となっている。

$a = e_1, b = e_2, c = e_3$ とおくと、$V(e_1, e_2, e_3) = 1$ なので β が出る。

report 問題

(3) $\varphi(e_1, e_2, e_3)$ を計算せよ。

ヒント: $\varphi(e_1, e_2, e_3) = \underbrace{f'(x)(e_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x)} \cdot \underbrace{(e_2 \times e_3)}_{e_1} + \cdots\cdots$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$ とすると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{pmatrix}$$

φ：スカラー場

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ナブラ

作用素のベクトルのように考える

スカラー倍のように考える

すると、$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \boxed{f_2} \\ \boxed{\frac{\partial}{\partial z}} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ベクトル積のように考える

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

内積のように考える