微積分 第15回

積分定理

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div}}$ スカラー場

回転定理

ベクトル場 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
曲面 Σ

$$\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\ f)\cdot dS = \boxed{\int_{\partial\Sigma} f\cdot dr}$$

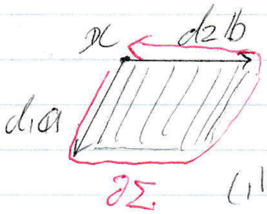
面積分　　　　線積分

成り立つように定義する

先に計算

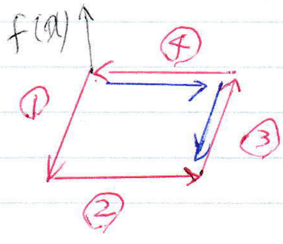
無限小のlevelで成り立てばよい。

微積分学の基本定理が成り立つように
微分が定義されている —— 種



(小さな)曲面Σ

$d_1, d_2 \in D$
$a, b \in \mathbb{R}^3$



線積分は4つにわかれる
① + ② + ③ + ④

$$f(x)\cdot d_1 a + f(x+d_1 a)\cdot d_2 b - f(x+d_2 b)\cdot d_1 a - f(x)\cdot d_2 b$$

$$= \{f(x+d_1 a) - f(x)\}\cdot d_2 b - \{f(x+d_2 b) - f(x)\}\cdot d_1 a$$

$$= f'(x)(a)d_1\cdot(d_2 b) - f'(x)(b)d_2\cdot(d_1 a)$$

$$= d_1 d_2\{f'(x)(a)\cdot b - f'(x)(b)\cdot a\}$$

面積分は 水の流れがあったとき、単位時間に横切る水の量

$(\mathrm{rot}\,\mathbb{f})\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)$

$= d_1 d_2 (\mathrm{rot}\,\mathbb{f})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$

$(\mathbb{a},\mathbb{b}) \longmapsto (\mathrm{rot}\,\mathbb{f})(x)\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})$ 2次の交代形式

$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \mathbb{f}'(x)(\mathbb{a})\cdot\mathbb{b} - \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}$ とする。

rot $\mathbb{f}$ が存在するとしたら. これは 2次の交代形式になる。

確認.

$\mathbb{a}$ について線型である

$\varphi(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2,\mathbb{b}) = \mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)\cdot\mathbb{b} - \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{a}_1+\mathbb{a}_2)$

$= \{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}_1) + \mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}_2)\}\cdot\mathbb{b} - \{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}_1 + \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}_2\}$

$= \{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}_1)\cdot\mathbb{b} - \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}_1\} + \{\mathbb{f}'(x)(\mathbb{a}_2)\cdot\mathbb{b} - \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a}_2\}$

$= \varphi(\mathbb{a}_1,\mathbb{b}) + \varphi(\mathbb{a}_2,\mathbb{b})$

$\mathbb{b}$ についても同様

交代性は. $\varphi(\mathbb{b},\mathbb{a}) = \mathbb{f}'(x)(\mathbb{b})\cdot\mathbb{a} - \mathbb{f}'(x)(\mathbb{a})\cdot\mathbb{b}$

$= -\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b})$

よって 2次の交代形式である.

次に. rot $\mathbb{f}$ を決める。

2次の交代形式全体は 線型空間 (3次元)

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$dy \wedge dz : (\mathbb{a}, \mathbb{b}) \longmapsto (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{e}_1$ (交代形式)

$dz \wedge dx : (\mathbb{a}, \mathbb{b}) \longmapsto (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{e}_2$ (交代形式)

$dx \wedge dy : (\mathbb{a}, \mathbb{b}) \longmapsto (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{e}_3$ (交代形式)

基底になっている.

$\varphi(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \alpha_1 \, dy \wedge dz + \alpha_2 \, dz \wedge dx + \alpha_3 \, dx \wedge dy$ と書ける.

$(\mathrm{rot}\, \mathbb{f})(\mathbb{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ とすればよい。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めたい.

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_2, \ \mathbb{b} = \mathbb{e}_3$ とする。 $\mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_1$ である。

$(dy \wedge dz)(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = 1$

$(dz \wedge dx)(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = 0$

$(dx \wedge dy)(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = 0$ だから α_1 が決まる。

$$\varphi(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3) = \mathbb{f}'(\mathbb{x})(\mathbb{e}_2) \cdot \mathbb{e}_3 - \mathbb{f}'(\mathbb{x})(\mathbb{e}_3) \cdot \mathbb{e}_2$$

$$= \frac{\partial \mathbb{f}}{\partial y}(\mathbb{x}) \cdot \mathbb{e}_3 - \frac{\partial \mathbb{f}}{\partial z}(\mathbb{x}) \cdot \mathbb{e}_2 \quad (*)$$

☆ 偏微分について

微分の式 $f(x+ad)-f(x)=f'(x)(a)d$

$a=e_2$ とおくと

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}d\right)-f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$=f\begin{pmatrix}x\\y+d\\z\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial y}(x)d$$

yだけの関数
として微分
つまり、偏微分

$f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$ とわける.

$f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\quad(i=1,2,3)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y}\\\frac{\partial f_2}{\partial y}\\\frac{\partial f_3}{\partial y}\end{pmatrix}$$

e_3と内積をとると
第3成分が出る.

よって

$$(*)=\frac{\partial f_3}{\partial y}(x)-\frac{\partial f_2}{\partial z}(x)=\alpha_1$$

つづき.

[宿題 (report)
(1) $a=e_3$, $b=e_1$ として α_2 を求める.
(2) $a=e_1$, $b=e_2$ として α_3 を求める.]