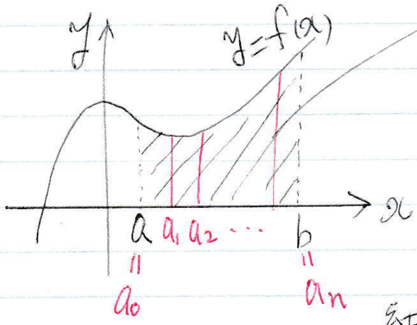
微積分第14回

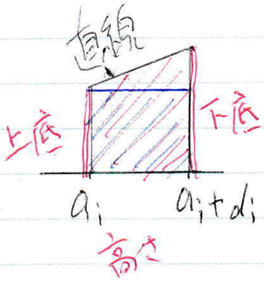
ベクトル解析
積分定理
微積分学の基本定理



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

細分. $a_{i+1}-a_i=d_i\in D$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx}_{=\int_{a_i}^{a_i+d_i} f(x)\,dx}$$



台形の面積

$$\frac{1}{2}d_i\left(f(a_i)+f(a_i+d_i)\right)$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}d_i\left(f(a_i)+f(a_i)+f'(a_i)d_i\right)$$

$$=\frac{1}{2}d_i\left(2f(a_i)+f'(a_i)d_i\right)$$

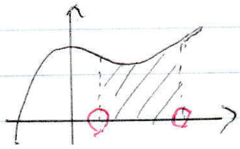
$$=d_i f(a_i)+\frac{1}{2}\underbrace{d_i^2}_{=0}f'(a_i)$$

$$=d_i f(a_i)$$

基本定理

$$F' = f$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



境界のところでの
積分になる.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_i+d_i} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,d_i \quad \text{———} \quad (*)$$

ここで、$b-a = d \in D$ とすると $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+d} f(x)\,dx$

$$= f(a)\,d$$

無限小のlevelで
微積分学の基本定理が成り立つ
ように、微分係数の定義を決めた。

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(a_{i+1}) - F(a_i) \right) = F(b) - F(a)$$

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{F(a_1)} - F(a_0) \\
 & F(a_2) - \cancel{F(a_1)} \\
 & F(a_3) - \cancel{F(a_2)} \\
 & \vdots \\
+) & F(a_n) - F(a_{n-1}) \\
\hline
 & F(a_n) - F(a_0)
\end{array}$$

無限小のlevel
⇓ 自動的
有限のlevel

ベクトル解析

登場するのは スカラー場, ベクトル場

スカラー場 $\xrightarrow[\text{勾配}]{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow[\text{回転}]{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow[\text{発散}]{\text{div}}$ スカラー場

スカラー場	ベクトル場	ベクトル場	スカラー場
↕	↕	↕	↕
0次の微分形式	1次の微分形式	2次の微分形式	3次の微分形式

線積分　曲線 $[a,b] \to \mathbb{R}^3$

力の場で、曲線に沿って動いて
どれだけ仕事されたか。

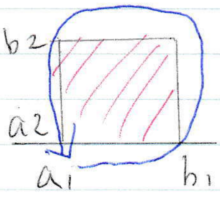
面積分　曲面 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$

体積分

流れの場で、単位時間にどれだけ
水が横切るか。

積分定理

ベクトル場 f, 曲面 Σ とする。



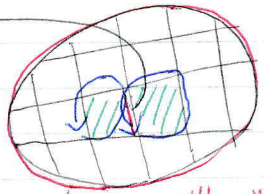
回転定理

$$\int_\Sigma (\mathrm{rot}\, f)\cdot dS = \int_{\partial\Sigma} f\cdot dr$$

(面積分)　境界　(線積分)

このときも. 無限小のlevel $\xrightarrow{\text{自動的}}$ 普通のlevel

打ち消し合う



端だけ残る

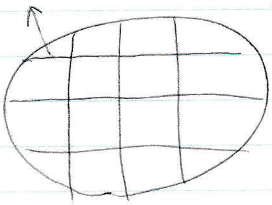
面積分は
境界での線積分

発散定理

f : ベクトル場
Ω : 領域
$\partial\Omega$: 曲面

$$\int_{\Omega} (\mathrm{div}\, f)\, dV = \int_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

体積分　　　　境界での面積分



外向きに
向きをつける