

微積分 第12回

ベクトル解析 空間 \mathbb{R}^3 ベクトル場 (力の場、流れの場)
スカラー場

操作主義の立場

ベクトル — 交代形式
ベクトル場 — 微分形式

ベクトル

基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

一意的 $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ 1次の交代形式
線型空間

$$dx = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1, dy = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_2, dz = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_3$$

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

対応、同一視

ベクトル場

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

(係数
 $f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

1次の微分形式

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

2次の交代形式
線型空間

$$dy \wedge dz: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$\parallel a \quad \parallel b$

$$dz \wedge dx : (a, b) \mapsto \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$dx \wedge dy : (a, b) \mapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

- 意的 $a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$

ベクトル場

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

2次の

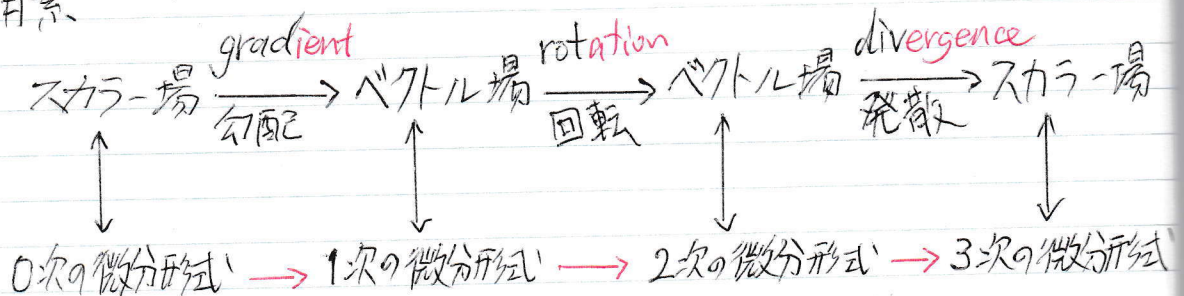
$$\text{微分形式} \quad f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

操作主義

ベクトル場 \leftarrow $\begin{matrix} 1 \text{ 次の微分形式} \\ 2 \text{ 次の微分形式} \end{matrix}$

スカラー場 \leftarrow $\begin{matrix} 0 \text{ 次の微分形式} \\ 3 \text{ 次の微分形式} \end{matrix}$

作用素



勾配

$$\text{スカラー場 } \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } \varphi$$

微分

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

 $\varphi'(x)$ は $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 線型写像 (1次の交代形式)

$$\varphi'(x)(a) \in \mathbb{R}$$

$$\varphi'(x) = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R})$$

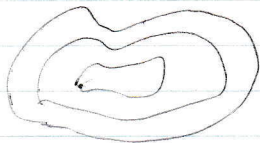
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) dz$$

勾配のイメージ

2次元で考える

(標高: 等高線)

(気圧: 等圧線)


 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 平面上のスカラー場

 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 曲線
 $\varphi \circ \gamma$ 合成

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t)) \gamma_2'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}$$

勾配

$= 0$ とし、 γ : 等高線に沿って
動くとすると、
接ベクトルに直交する。

