No. 1

Date '16. 7. 11

微積分第10回

ベクトル解析　空間$\mathbb{R}^3$

主役

ベクトル場（力の場，流れの場）　万有引力の法則　空気の流れ

スカラー場（温度，湿度，気圧）

$$\text{スカラー場} \xrightarrow{\text{grad}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{rot}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{div}} \text{スカラー場}$$

gradient　rotation　divergence

勾配　回転　発散

古典的には platonic な立場

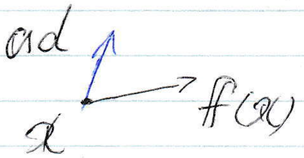
- この犬は賢い。
- 美は永遠である。　ideaの世界

近代科学は operational な立場

操作できるものを扱う。実験。

力の場　測る。

$d \in D$



点x，aの方向に動くとする。

仕事がされる。

$$f(x)\cdot ad = (f(x)\cdot a)d$$

$$a \in \mathbb{R}^3 \longmapsto f(x)\cdot a \in \mathbb{R}$$

線型である。

$$\begin{cases} f(x)\cdot(a_1+a_2) = f(x)\cdot a_1 + f(x)\cdot a_2 \\ f(x)\cdot(\alpha a) = \alpha(f(x)\cdot a) \end{cases}$$

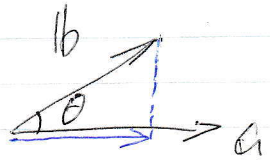
空間の各点 $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型関数

$\searrow f(x)$ $\qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

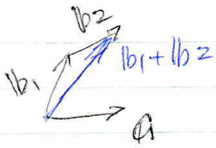
$a = e_1$ とすれば f_1 が出る.
$a = e_2$ $\qquad f_2$
$a = e_3$ $\qquad f_3$

内積

$$a \cdot b = |a|\underbrace{|b|\cos\theta}_{\text{正射影}}$$



幾何学的定義



$$\begin{cases} a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 \\ a \cdot (\alpha b) = \alpha (a \cdot b) \end{cases}$$
線型（a についても同様）

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$ と書ける。

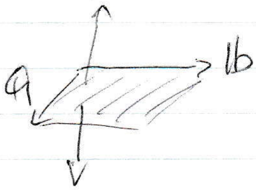
よって, $a \cdot b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$

$$= a_1 b_1 \underbrace{e_1 \cdot e_1}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{e_1 \cdot e_2}_{=0} + \cdots\cdots$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ベクトル積（外積）

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$　　$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ はベクトルである。



$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ の幾何学的定義

大きさ……$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積

向き……平面に直交する向きで $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が右手系

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

わかること．$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$　　$\mathbf{b}$ についても同様

$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\times\mathbf{b} \quad \text{——} \ ☆$$

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3$$

とする．

☆が成り立つとすると

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\times(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3)$$

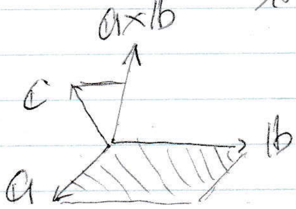
$$= a_1b_1\underbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1}_{0} + a_1b_2\underbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}_{\mathbf{e}_3} + a_1b_3\underbrace{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3}_{-\mathbf{e}_2}$$

$$+ \cdots\cdots$$

宿題：つづきを計算せよ．

★の証明

第3のベクトル c と内積をとる。



$$(a\times b)\cdot c = |a\ b\ c|$$

★の左辺

$$((a_1+a_2)\times b)\cdot c = |a_1+a_2,\ b,\ c|$$

右辺 $(a_1\times b + a_2\times b)\cdot c = (a_1\times b)\cdot c + (a_2\times b)\cdot c$

$= |a_1\ b\ c| + |a_2\ b\ c|$

c と内積をとれば等しい。

$x\cdot c = y\cdot c$

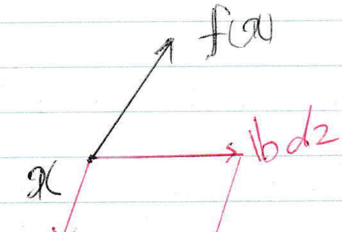
$(x-y)\cdot c = 0$

c として $x-y$ をとれば、 $|x-y|^2 = 0$

よって $x = y$

元も等しい。 //

流れの場　　　$d_1, d_2 \in D$



測定

単位時間に升を横切る水の量

平行六面体の体積.

$$(a d_1 \times b d_2)\cdot f(x) = ((a\times b)\cdot f(x))\, d_1 d_2$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longmapsto (a\times b)\cdot f(x)$$

二重線型

a, b を入れかえると符号がかわる

2次の交代形式