No. 1
Date '16 4 18

微積分 第1回

筑波大は 3学期制だった → 今は2学期制

1学期	4〜6月	春term 4〜7月	A	モジュール
2	9〜11月		B	
3	12〜2月		C	
		秋term 10〜2月	A	モジュール
			B	
			C	

※A, B, C モジュールの
区切りに注意

最初の目標 —— 多変数の微積分

1変数 $y = f(x)$ 高校でやった
多変数 たとえば $z = \sin xy$

まず1変数の微分を洗い直す

$$\left.\begin{array}{ll} 17C & \text{Newton} \\ 18C & \text{Euler} \\ & \text{Lagrange} \end{array}\right\} \text{黄金時代}$$

高校では

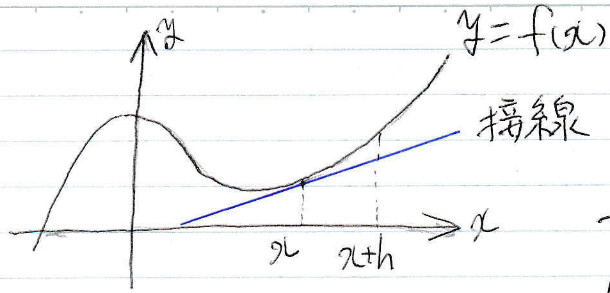
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

極限を学んでから微分。
これは19C以降のやり方。

この講義では 17〜18Cのやり方でやっていく。

No. 2

Date



一般に、接線とf(x)は一致しない

$h \to 0$ とするとどんどん近づいていく

基本的な考え方

曲がっているのはイヤ

⇓

まっすぐなものでおきかえよう

ニュートンたちの時代

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = h f'(x)}$$

hが十分小さければ成り立つと考えた。
h = 0 以外にも成り立つhがたくさんあるように見えた。

記号

∀：任意の (all)
∃：存在する (existence)
∃!：ただひとつ存在

$$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \} \quad \neq \{0\}$$

2回かけて0になる実数　（たくさんある）

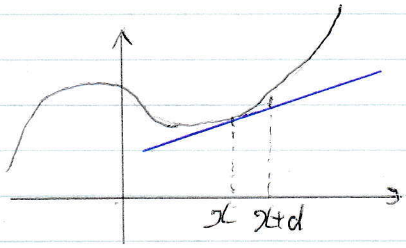
たくさんとは…

$$(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)(f(x+d) = f(x) + ad)$$

傾きを決定できるくらい d がある。

この a を微分係数といい、$f'(x)$ と書く。

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x+d) = f(x) + f'(x)d \\ (\forall d \in D) \end{array}}$$



$d \in D$ の範囲で
接線と一致する

公式 $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ を証明する.

高校では
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

ニュートンたちは
$$\begin{aligned} f(x+d) + g(x+d) &= f(x) + f'(x)d + g(x) + g'(x)d \\ &= f(x) + g(x) + (f'(x) + g'(x))d \end{aligned}$$

d の1次の係数を見る.

公式 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を証明する

高校では $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ライプニッツの証明

$$f(x+d)g(x+d) = (f(x)+f'(x)d)(g(x)+g'(x)d)$$

$$= f(x)g(x) + f(x)g'(x)d + f'(x)g(x)d + f'(x)g'(x)\underbrace{d^2}_{=0}$$

$$= f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}d$$

展開するだけ

17〜18Cのやり方でやさしくなる。

合成関数の微分

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$　　$g\circ f$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

高校では $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}}}_{\to g'(f(x))} \times \underbrace{\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}}_{\to f'(x)}$$

これには問題がある。
《分母が0となると困る.》

ニュートンたちは.

$$g(f(x+d)) = g(f(x) + f'(x)\,d) \quad f'(x)\,d \in D,\ f'(x) \in \mathbb{R}$$

$$= g(f(x)) + g'(f(x))\,f'(x)\,d$$

gを$f(x)$で微分

$$\boxed{d \in D,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha d \in D}$$

$\because (\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$

($d_1, d_2 \in D \Rightarrow d_1 + d_2 \in D$
は成り立たない。

$$(d_1+d_2)^2 = \underset{0}{d_1^2} + \underset{0}{d_2^2} + 2d_1d_2$$

$2d_1d_2$: 一般に0でない)