数学学習における思考実験の機能に関する研究
―「多角数」への活用を通して ―

数学科　　倉 井 庸 維

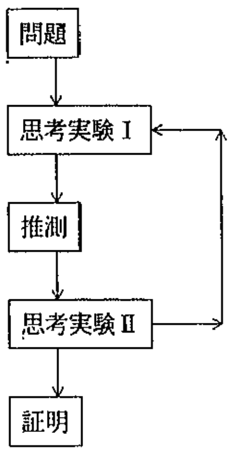
これまで数学の学習における思考実験の規定とその活用に関する研究や思考実験を含む数学する学習のモデルの設計がなされたが、それらを土台にモデルを精緻化することと、モデルの中の思考実験の機能を調べるために、「多角数」を題材とした学習が展開された。その結果、これまで同様「思考実験Ⅰ」には、推測を作る機能が、「思考実験Ⅱ」には、推測に対して確信を強める機能と反証する機能があることが認められた。さらに、「証明」後に「思考実験Ⅱ」を行うことによって自らの解を見直すこと、チェックすることが可能であり、主体的に数学する態度の習得への可能性が示された。

キーワード：思考実験、数学する、多角数

1.はじめに

(1) これまでの研究

これまで、マッハ(1971/1926)の思考実験をもとに、数学の学習における思考実験の規定とその活用に関する研究が(倉井,2001b) が行なわれ，さらに Polya(1973)のアイディアを加え思考実験を含む数学する学習のモデルの設計が以下にように示されてきた(倉井,2001a)。



(2) 研究の目的と方法

そこで，本稿の目的は，この思考実験を含む数学する学習のモデルを様々な事例に適応し，精緻化することと，記モデルの中で思考実験を活用することによって，この思考実験の機能を確かめることである。

これまで，平面幾何では，円周角の定理や方べきの定理，重複組合せや整数問題に対して，上記学習モデルを適応した学習展開例を示した。そこで，本稿では，「自然数の列」の「多角数」を事例として取り上げることにする。

2.教材について

「自然数の列」の「 多角数」は，数学の歴史においては，紀元前500～600年頃のピタゴラス学派によって発見されたといわれている。

この教材に関連した内容は，現在高等学校の「 数学Ⅰ」の「自然数の列」と「数学A」の「数列」に含まれている。本内容は，自然数を用いており，「数える」という人間の最も基本的な活動に関連した内容である。

ここでの学習目標は，「中学校で簡単な具体例を通してあつかった基本的な個数の処理の考え方を基にして，そこに現れる数のもつ規則を発見し，それを一般的な考えにまとめあげ」[1] ることである。

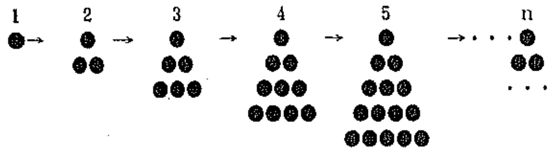
そのための指導方法として，具体的な例を「 操作的，実験的に」 扱い，「数の並び方の規則性を自然数と対応させながら発見したり考察したりし，それを基に数えあげていくようにする。」[2] ことが求められ，そのための具体的な教材例として，三角数や四角数があげられている。この三角数や四角数を用いることによって，「自然数の列の和を視覚的に扱い，生徒が自ら工夫して数え上げ一般化していくことも可能と考えられる。」[3]

3.多角数

(1) 三角数

ここでは，「数学Ⅰ」の「 自然数の列」と「数学A」の「数列」をすでに学習した生徒を対象とし，最初に思考実験を用いた場合の学習展開を示し，その後，差異を際立たせるために，思考実験を用いない例を示す。ただし，三角数，四角数に関しては，一般の式は容易に求めることができるため，差異が際立たない。そこで，五角数を中心に例として示す。

まず，三角数から考える。これは，下の図のように，小石を三角形の形に並べる。そのとき，第n番目の三角形には小石がいくつ含まれているかが問題として提示される。



「思考実験Ⅰ」との関係で考える。

まず，「実験空間」である。ここでは，実験が行われる場所、「空間」を設定するのではある。

①「実験空間」・・・平面。三角形。

次は，「定数と変数」と「変数の変化方法」である。「定数と変数」を設定することによって、着目すべき点が明確になり，「変数の変化方法」を設定することによって系統的に変数を変化させることができる。設定の結果は以下のようになる。

②「定数と変数」・・・n:各辺に置かれる石の数，

T(n):石の総数

③「変数の変化方法」・・・nを1,2,3,・・・と順番に変化。

T(1)=1

T(2)=1+2

T(3)=1+2+3

T(4)=1+2+3+4

T(5)=1+2+3+4+5

・・・・・・

ということから，n番目の小石の数T(n)は，

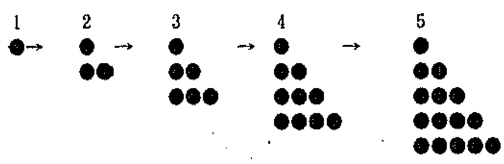
T(n)=1+2+3+4+・・・+n

である。

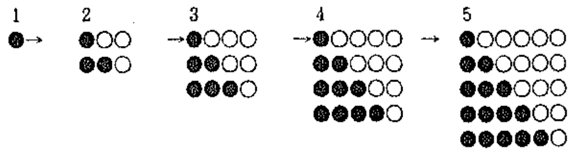
ここで，この結果を表にすると，以下のようになる。

n	1	2	3	4	5	・・・	n
T(n)	1	3	6	10	15	・・・	?

三角形は維持する必要があるが，思考実験の変化方法にしたがって，図のように変形しても，n番目の石の総数である問題の本質には関係しないことがわかる。



ここで，階段上に作られた三角形に対して，左右対称にした同じ三角数で埋めると，下の図のようになる。



これは，それぞれ元の2倍であり，すべて長方形になっているので，石の総数を求めることは容易である。そこで，「思考実験Ⅰ」を行う。

2番目は，2×(1+2)

3番目は，3×(1+3)

4番目は，4×(1+5)

5番目は，5×(1+5)

である。

ここから，定数と変数に着目しながら観察し，その後，n番目は，n(n+1)であることが推測される。

これらは，すべてT(n)の2倍であるから，

T(n)= 1/2×n(n+1)

と推測される。

すなわち，

1+2+3+4+・・・+n=1/2 ×n(n+1)・・・(*)

である。

ここで，「思考実験Ⅱ」を行う。

n=1のとき，T(1)=1/2×1(1+1)=1となり，(*)は成り立つ。

また，n=2のときも，T(2)=1/2×2(2+1)=3=1+2となり，(*)は成り立つ。これで，(*)がすべての自然数に対して成り立つ可能性は，高まったといえる。

さらに，n=3のときも調べると，T(3)=1/2×3(3+1)=6。これは，実際に計算した場合，T(3)=1+2+3=6となるので，n=3についても，(*)は，成り立つことが示された。

このように，「思考実験Ⅱ」を行ったことによって，(*)が成り立つ可能性がかなり高いことが示される。これは，「思考実験Ⅱ」の確証を強める機能であるといえる。最終的には，数学的帰納法を用いることによって，証明することができ，この問題に関しては，これで終わりとなる。

ここで，別の「思考実験Ⅰ」を考える。ここでは，

①「実験空間」・・・多角数全体

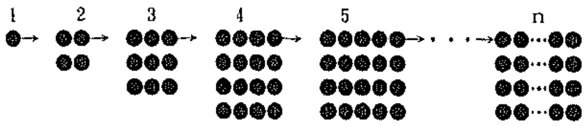
②「定数と変数」・・・m角数，m角数の第n項

③「変数の変化方法」・・・m角数のmを3,4,5,・・・と順番に変化

のように設定し，「思考実験Ⅰ」を行う。

(2) 四角数

まず，三角形を四角形に変形した場合$m=4$の場合，どのような公式が導かれるかという問題が作られる。



変数を変化させると，四角数の場合，その総数は，容易に求めることができる。

$Q(1)=\ \ 1=1^2$

$Q(2)=\ \ 4=2^2$

$Q(3)=\ \ 9=3^2$

$Q(4)=16=4^2$

$Q(5)=25=5^2$

⋮

これより，$Q(n)=n^2$であることが，容易に推測される。

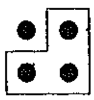
では，$Q(n)$ と$Q(n-1)$の間の関係は，どうであろうか。変化法によって，比較すると，

1

$Q(1)=1$

↓

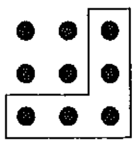
2



$Q(2)=Q(1)+3$

↓

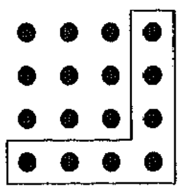
3



$Q(3)=Q(2)+5$

↓

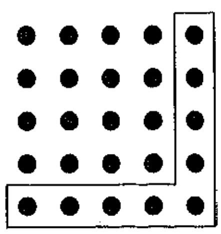
4



$Q(4)=Q(3)+7$

↓

5



$Q(5)=Q(4)+9$ となり，

$\Delta(n)=Q(n)-Q(n-1)\,(n\geqq 2)$とすると，下の表のようなる。

n	2	3	4	5	・・・	n
Δ	3	5	7	9	・・・	?

この表から$\Delta(n)$ が，すぐに$(2n-1)$とわかるとは，限らない。そこで，図を見て増加分について検討する。

すると，$Q(2)$ は，1辺が２の正方形であり，$Q(1)$ に比べて，3が加えられているが，これは，1辺に２つの石が置かれている辺が２つあり，重複して数えられている石が１つあるので，$\Delta(2)=3=2\times 2-1$ となる。

同様に，$Q(3)$をみると，1辺に３つの石が置かれており，それが２辺加えられているが，重複して数えているので，

$\Delta(3)=5=3\times 2-1$

以後，同様に考えると，

$\Delta(4)=7=4\times 2-1$

$\Delta(5)=9=5\times 2-1$

これは，定数を変化させているので，「思考実験Ｉ」といえる。

ここで，定数と変数に着目すると

$\Delta(n)=2n-1\,(n\geqq 2)$

と，推測される。

したがって，

$Q(n)=Q(n-1)+(2n-1)\,(n\geqq 2)$

であることがわかる。

そこで，いままでの結果をまとめると，

$Q(1)=1$

$Q(2)=Q(1)+3$

$Q(3)=Q(2)+5$

$Q(4)=Q(3)+7$

$Q(5)=Q(4)+9$

・・・

$Q(n)=Q(n-1)+(2n-1)\,(n\geqq 2)$

これより，再帰的に考えると，

$Q(5)=Q(4)+9$

$=Q(3)+7+9$

$=Q(2)+5+7+9$

$=Q(1)+3+5+7+9$

$=1+3+5+7+9$

であることから

$Q(n)=Q(n-1)+(2n-1)\,(n\geqq 2)$は，$n=1$ についても確認ると

$Q(n)=1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)$ であり，すでに

$Q(n)=n^2$ と推測されているので，

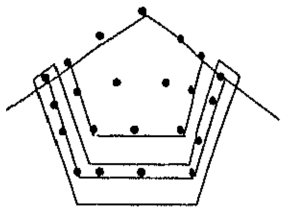
$1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=n^2$

と導くことができる。

これも，数学的帰納法によって，証明できる。

(3) 五角数

では，五角形の石を置いた場合の石の数はどうなるであろうか。五角数P(n)とする。



$P(1)=1$

$P(2)=5$

$P(3)=P(2)+7=5+7=12$

$P(4)=P(3)+10=12+10=22$

増加分$\Delta(n)=P(n)-P(n-1)$ とすると，

n	2	3	4	…	n
Δ	4	7	10	…	?

となる。しかし，この表から，Δ(n) の式を推測することは，データが少なく難しい。そこで，別に考える必要がある。P(2)からP(3)に移るときに増加している石は，P(2) と共有している2 辺以外の，3辺に置かれている石である。1辺に 3 つの石が置かれているので，3×3であるが，2つの頂点に置かれている石は，重複して数えているので，3×3-2=7。これは，実際に数えた場合と一致する。同様に，P(3) からP(4)の増加分を考えると，3辺分が増えているので，3×4。共通部分が2 つあるから，3×4-2=10。これも，一致する。

$P(3)=P(2)+(3\times3-2)$

$P(4)=P(3)+(3\times4-2)$

したがって，P(n-1) からP(n)への増加分Δ(n) は，

$\Delta(n)=3n-2(n\geqq2)$

と，推測される。

つまり，

$P(n)=P(n-1)+(3n-2)(n\geqq2)$

となる。

実際，P(n-1) からP(n)への増加分Δ(n) は，共通した辺以外の 3 つの辺においては，n個の石が置かれているので，3 n。しかし，頂点の 2 つは，重複して数えているので，3n-2 となる。

したがって，求めるP(n)は，

$P(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)(n\geqq2)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$

$=1+3/2\times n(n-1)+(n-1)$

$=1/2\times n(3n-1)$

ここで，n=1のときは，$P(1)=1/2\times1(3\times1-1)=1$であるので，すべての自然数n について，成り立つ。

しかし，この式が，n=2, 3において，成り立つか否かを調べることによって，この答えに確信が持てる。

$P(2)=1/2\times2(3\times2-1)=5$となり，一致する。

$P(3)=1/2\times3(3\times3-1)=1/2\times3\times8=12$となり，一致するので，これは，第n番目の五角数を表す式であることがわかる。

(4) 六角数

次に考えるのは，六角数である。

六角数も同様に，1つの頂点を共通にし，拡大していく形である。ここでは，三，四，五，六角数と今度は，角数を増やしていくとき，どのように変化していくかをみるのである。これも，「思考実験 I」といえる。

$H(1)=1$,

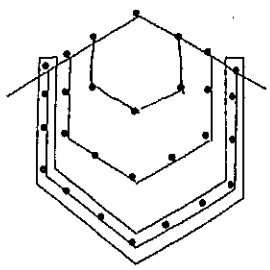
$H(2)=6$,

$H(3)=H(2)+9=15$,

…

ここで，n番目の五角数P(n)を求めたときと，同様に，考える。

つまり，2辺は，共通だから，残り 4 辺の上に置かれている石の数は，4×3 。しかし，3つが重複して数えられているので，4×3-3=9である。



$H(3)=H(2)+(4\times3-3)$。

$H(4)=H(3)+(4\times4-3)$となることが推測される。実際に，図に描いて確かめることができる。

ここから，

$H(n)=H(n-1)+(4n-3)$

と推測される。

実際，n番目の六角数H(n)は，辺の上にn 個の石が置かれており，H(n-1)と2 辺は共通であるから，増加分は，4n。しかし，重複して数えられている部分は，3 つあるので，4n-3である。

ここから，

$H(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(4k-3)(n\geqq2)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

$=1+4\times 1/2\times n(n-1)+(n-1)$

$=2n^2-n$

$=n(2n-1)$

ここで，n=1のときは，$H(1)=1\times(2-1)=1$で，一致する。そこで，すべての自然数n に対して，

$H(n)=n(2n-1)$であるといえる。

ここで，導いた解答が確かであるか否かを検証するための「思考実験Ⅱ」を行う。

$H(2)=2\times(2\times 2-1)=6$で，一致する。

$H(3)=3\times(2\times 3-1)=15$で，これも，一致するので，計算間違い等はなく，確かであるといえる。

4.さらなる展開

これまで，三角数，四角数，五角数，六角数と求めてきた。これから，より一般化されたm 角数を求めることを考える。そこで，もとに戻って考える。

五角数の場合

$P(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)\ (n\geqq 2)$

六角数の場合

$H(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(4k-3)\ (n\geqq 2)$

ここで，問題になるのは，増加分である。五角数と六角数と比較してみると，(3k-2)と(4k-3)と係数と定数項の数字の値がそれぞれ1 つずつ増えていることがわかる。まず，(3k-2) のk の係数3 は，共有している辺の数2 を除いた5-2 であり，(4k-3) のk の係数4 も，共有している辺の数の2 を除いた6-2 である。すなわち，kの係数は，どちらも辺の数から共通部分の辺の数を引いた値である。したがって，m角形の場合，(m-2)であると推測される。また，定数項は，重複して数えている部分であり，それぞれの係数の数から1 を引いた数である。つまり，五角数の場合は(5-2)-1=3-1=2，六角数の場合は，(6-2)-1=4-1=3である。ここから，m角数の定数項は，(m-2)-1=m-3であるといえる。

したがって，n番目のm 角数は，

$M(n)=1+\sum_{k=2}^{n}\{(m-2)k-(m-3)\}\ (n\geqq 2)$

であると推測される。

これらを四角数m=4 の場合で「思考実験Ⅱ」を行う。

$Q(n)=1+\sum_{k=2}^{n}(2k-1)\ (n\geqq 2)$

となり，これは，奇数の和になっていることがわかる。このことから，四角数に関しては，この式が成り立ちそうであるといえる。

次に，三角数に対しても，「思考実験Ⅱ」を行う。

m=3 を代入して調べると，

$T(n)=1+\sum_{k=2}^{n}k$

となる。

これは，自然数の和になり，三角数である。

よって，n番目のm 角数は，

$M(n)=1+\sum_{k=2}^{n}\{(m-2)k-(m-3)\}\ )\ (n\geqq 2)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\{(m-2)k+1\}$

$=1+(m-2)\ \{1/2\ \times n(n-1)\}\ +(n-1)$

$=(m-2)\ \{1/2\ \times n(n-1)\}\ +n$

であり，

n=1 のとき，

$M(1)=1/2\times(m-2)\times 1\times(1-1)+1$

$=1$

m 角数のはじめの数は，1より，一致する。

ゆえに，すべての自然数n に対して，n 番目のm 角数M(n)は，

$M(n)=1/2\times(m-2)n(n-1)+n$

ここで，今度は，論理的な誤りがないか否かについての「思考実験Ⅱ」を行う。例えば，m=4を代入すると，$Q(n)=n^2$ になるはずである。

$(4-2)/2\times n(n-1)+n=n(n-1)+n=n^2$であり，m=4のとき，成り立つ。

さらに，m=5，6の場合は，

$(5-2)\times 1/2\times n(n-1)+n=3/2n(n-1)+n$

$=1/2\times n(3n-1)$

$(6-2)\times 1/2\times n(n-1)+n=2n(n-1)+n$

$=n(2n-1)$

m=5，6のどちらの場合も，成り立つ。そこで，n番目のm角数は，この式で成り立つといえる。

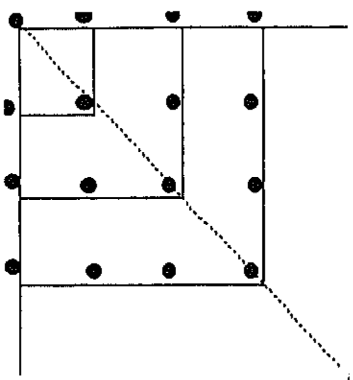
これで，一応の終結を迎えた。ここでの考え方は，漸化式から求める考え方で，(n-1)番目にいくつ加えればn 番目の数になるかということを考え，求めていったのである。

5. 別の解法への思考実験の活用

上記以外の解法として、最初に求めた三角数に帰着して，四角数，五角数等の他の多角数を求めることもできる[4]。この方法は，Σの計算を学習していない場合でも，求めることができるので実践では有効であると考える。

(1) 四角数

まず，四角数から考察する。四角数を三角数に分割する。分割の方法は，左の図のように，共通頂点から対角線を引き，その対角線を用いて，三角数に分割すると，2つに分解できる。それぞれは，$1/2\times n(n+1)$であるから，



$1/2\times n(n+1)+1/2\times n(n+1)$である。しかし，共有している部分が1つあり，それは，（右図の対角線）nである。

したがって，

四角数$Q(n)=n(n+1)-n=n^2$。

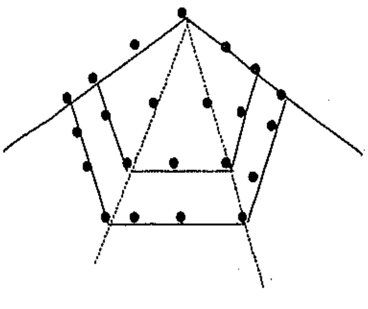
ここで,「思考実験Ⅱ」となる。

$Q(1)=1^2=1$ で，n=1のとき，成り立つ。

$Q(2)=2^2=4$ であり，一方，実際の四角数は，1+3=4。よって，n=2のときも，成り立つ。

$Q(3)=3^2=9$ であり，一方，1+3+5=9であるので，n=3のときも成り立つ。ここから，四角数については，$Q(n)=n^2$であることがわかる。

(2) 五角数と六角数



次は，五角数である。五角数も，四角数と同様に，三角数で表現することができればよい。五角数は，3つの三角数から成り立っていることがわかる。したがって，

$3/2\times n(n+1)$。

しかし，共有している部分が2つあり，これは2nである。よって，

$3/2\times n(n+1)-2n=1/2\times n(3n-1)$

これに対しても,「思考実験Ⅱ」を行う。

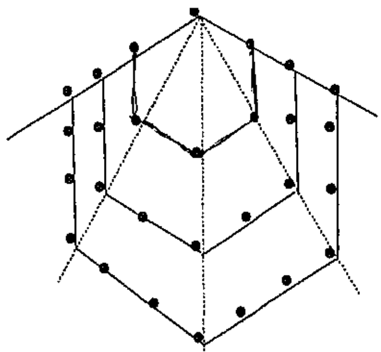
n=1 のとき，$1/2\times 1\times(1-1)=1$であるので，成り立つ。

n=2 のとき，$1/2\times 2\times(2-1)=5$ で，成り立つ。

n=3 のとき，$1/2\times 3\times(3-1)=12$で，成り立つ。

これより，五角数は，第n番目の値P(n)は，$1/2\times n(3n-1)$であることがわかる。

四角数$Q(n)=2\times 1/2\times n(n+1)-n$。



五角数$P(n)=3\times 1/2(n+1)-2n$ から，六角数$H(n)=4\times 1/2\times n(n+1)-3n$であると推測される。この推測に対して，実際に図を書いてみる。原点から頂点への対角線は，3本引くことができ，4つの三角形に分割できる。したがって，$4\times 1/2\times n(n+1)$であるが，対角線が共有されるので，3n が重複して数えていることになる。そこで，$4\times 1/2\times n(n+1)-3n$ となり，四角数，五角数の式から，変化法によって推測したことと同じ結果となった。

したがって，六角数$H(n)=2n(n+1)-3n=2n^2-n=n(2n-1)$と推測することができる。

これに対しても,「思考実験Ⅱ」を行う。

n=1 のとき，$1\times(2\times 1-1)=1$で，成り立つ。

n=2 のとき，$2\times(2\times 2-1)=6$で，成り立つ。

n=3 のとき，$3\times(2\times 3-1)=15=6+9$ で，成り立つ。

ここから，今後は，m角数について，考えることができる。

四角数$Q(n)=2\times 1/2\times n(n+1)-1n$

五角数$P(n)=3\times 1/2\times n(n+1)-2n$

六角数$H(n)=4\times 1/2\times n(n+1)-3n$

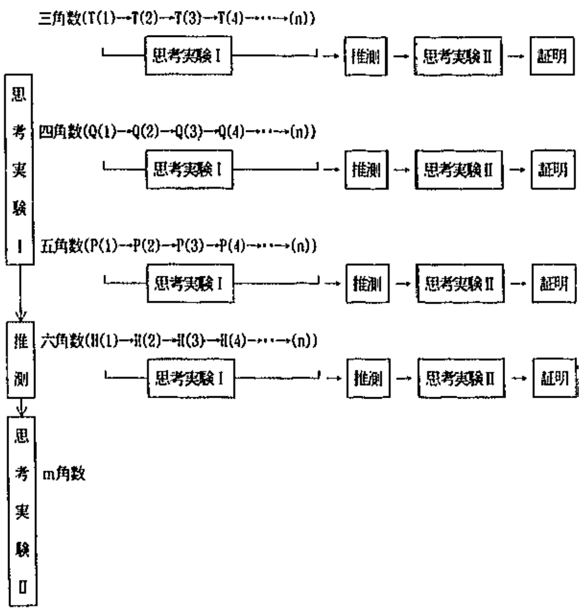
より，変化している部分と，変化していない部分とに着目し，変化している部分を変数m で置き換えると，

m 角数$M(n)=(m-2)\times 1/2n(n+1)-(m-3)n$

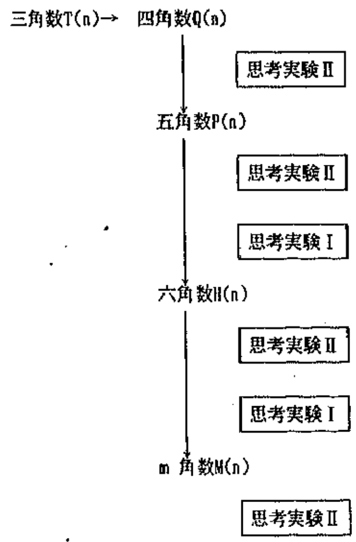
と推測される。

これまでの学習展開を図式すると，以下のようになる。どちらも数学する(Do Math) 過程といえる。

前半の漸化式を用いた場合の展開



後半の三角数に分割して求める場合の展開



どちらの展開も，思考実験が推測や証明に対して，関わっていることが明らかになった。ただし，「思考実験Ⅱ」によって，反証され，「思考実験Ⅰ」に戻る場合は，なかった。

6. 思考実験を用いない場合の学習展開

思考実験を用いていない場合の学習展開を示す。

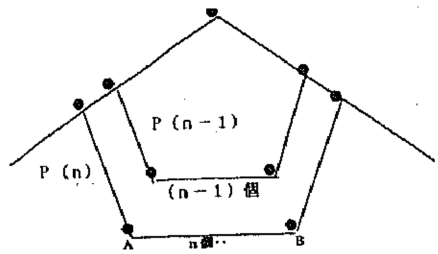
(1) 五角数の場合

第n 番目の五角数を$P(n)$とする。$P(n)$の１辺上の石の数は，n個である。ここで，$P(n)$ と$P(n-1)$を構成する石の個数の差は，$P(n)$ と$P(n-1)$が共有しない$P(n)$の3 辺上の石の数に等しい。この3 辺が2 点(図のA,B)を共有していることから，

$$P(n)-P(n-1)=3n-2\ (n\geqq 2)$$

である。

したがって，$n\geqq 2$ のとき，



$$P(n)=\{P(n)-P(n-1)\}+\{P(n-1)-P(n-2)\}$$
$$+\{P(n-2)-P(n-3)\}$$
$$+\cdots+\{P(2)-P(1)\}$$
$$+P(1)$$
$$=P(1)+\sum_{k=2}^{n}\{P(k)-P(k-1)\}$$
$$=P(1)+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(3k-2)-1$$
$$=3/2\times n(n+1)-2n$$
$$=1/2\times n(3n-1)$$

$n=1$ のとき，$1/2\times 1\times(3\times 1-1)=1$となり，$P(1)=1$と一致するので，$n=1$のときも成り立つ。よって、n 番目の五角数

$$P(n)=1/2\times n(3n-1)$$

である。

この解法は、思考実験を用いた学習展開に比べて，エレガントでしかも簡潔に表現できる。しかし，これは，思考実験を用いてさまざまに考えた後に到達するゆえに，エレガントであり，優れた表現であると感じるのであり，始めからこのように表現されたものを提示された場合には，学習者である生徒は，エレガントと感じるよりはむしろ，冷たい，接しにくいという感じをもつこともあり得ると考える。

7. 考察

「自然数の列」から,「多角数」を教材として取り上げて数学する(Do Math) 学習の展開を示し，その過程において思考実験が機能していることを示した。ここでは，それらを振り返るとともに，マッハ，Polya による数学の思考実験との比較することによって，数学学習におけ

る思考実験を考察する。

「思考実験Ⅰ」によって推測が導かれ，その推測に対して,「検証のための実験(思考実験Ⅱ)」が行われ，その後，「証明」[5]の過程へと進んだ。証明され，最後に示される一般化された公式を，再度，個別の事例で確かめている。これは,「思考実験Ⅱ」であり，従来，数学教育においては「解の見直し」といわれてきたものであり，改めにその機能の重要性を認識することができた。前章では，記述されていないが，実際には，この段階で，証明されたと思われた公式が，反証され，再度考え直すということが行われている。これは，根本的な問題ではなく，式を展開し，計算し，まとめていく段階で誤りがあったためであり，論理的な誤り，式の操作の誤りでもあった。その誤りに気付くまでにかなりの時間がかかっており，何度か,「証明」と「思考実験Ⅱ」の間を行き来している。こうしたことは，一般の数学の学習には起こりうることであり，それをなくすことは，論理的な式の展開に対して習熟する以外にはない。すなわち，技能の面の鍛錬もある程度必要である。しかし，実際の数学教育の場面においては，本質的な部分- ここでは，多角数の一般化された公式を求めるということに対する本質的なアイディアの部分(差に着目することや三角数に分割すること)-には，大きな影響をもっていないにも関わらず，正しい結論を導くことに対しては，重きがかかっており，そのため，数学の道具といえる，シンボルの操作，つまり，式の計算に習熟しなければならないのである。

すなわち，アイディアの部分よりも，それを用いて操作を行ったり，表現する部分が，難しいという点が，数学を学習する生徒にとって，数学を難しいと感じさせている点の１つではないかと思われる。したがって，数学する(Do Math)上で，数学の本質的なアイディアとそれを表現する技能との両方が，必要とされるのである。そうしたことから，技能の習得も疎かにすべきではないことがわかる。本研究のテーマである，数学する(Do Math)ためには，これまで以上に，結果よりも思考の過程を重視するわけであるが，最終的に正しい結果に到達するか否かも無視することはできない。そのためにも,「思考実験Ⅱ」は，重要であるが，さらに，自分の行動を振り返り，チェックするという態度を育成する点は，問題に対して正しい解を得るという実用以上の機能があると思われる。また，問題解決後,「思考実験Ⅱ」によって，自らの解や証明をチェックすることによって，自らの誤りに気付き修正することが可能であるとともに，逆に，そこで確証が得られれば，自らの解や証明に対して，自信ももつことができる。この点が，数学教育における「思考実験Ⅱ」の大きな機能であると考える。ともすると，生徒の中には，正答は，教師が知っていて，示してくれるものであると考えたり，問題集の解答に書かれていると考え，自分自身では解を求めながらも，そのあとのチェックを怠ったり，また，教師に解答を示すことを要求する生徒さえもいるが，数学的な考え方を身に付けることを目標にするならば，そして，数学する(Do Math)ことを目標にするならば，自らの解や証明をチェックする方法をより一層重視した指導をすべきであろう。そして，自分の得た解に対して，自信を持つためにも自分自身の解に対して，批判的な態度を持つことが大切であると考える。自分の解や証明を自分自身でチェックすることによって，本研究では，扱っていないが，自らの解や証明を，自分の外へ出し，友人に示すことや第三者にわかるように表現するという能力の育成につながっていくと考える。

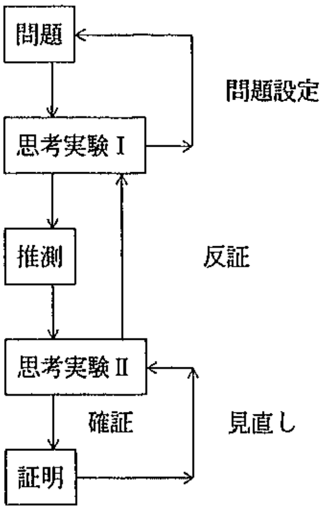
すなわち,「思考実験Ⅱ」には，繰り返すが，自分の解や証明に対して，確証を強める機能と反証する機能をもっており，その2つをともに行うことによって，自らの解や証明に対して，自信をもつことができ，また，逆に，自らの解や証明に対して，謙虚にもなることができるのであると考える。

思考の順番とは，逆になったが,「思考実験Ⅰ」は，それまでの自分の持っている知識を変化させることによって，「推測」を産み出していく。これは，常に，主体が対象に積極的に働きかけ，対象の中に見られる関係を見出すこと，さらには，新しい関係を作り出すことが，この「思考実験Ⅰ」には，期待されているといえる。そのために，変化させることがこの「思考実験Ⅰ」の中心である。しかし，思考実験の場合，何をどのように変化させるのかを意識することは，難しい。ともすると，何の脈絡もなく，非系統的に変化させることになってしまいがちであるからである。そのために，実験空間を限定し，それを明確にし，そして，変化させる変数を定め，系統的に変化させ、観察することが必要である。「思考実験Ⅰ」か否かを判断するための決定要素として、①「実験空間」②「定数と変数」③「変数の変化方法」の３つの要素が明らかになっていることが，必要であると思われる。このことによって，単なる試行錯誤による操作と区別して，効果も上がるものと考えるのである。

理論上は,「思考実験Ⅱ」によって，反証され，再度,「思考実験Ⅰ」をやり直すことも起こりうると考えたが，今回の教材では見られなかった。また，Polya(1973)の

デカルト＝オイラーの公式を導く際の「推測」と「思考実験Ⅱ」の間を往復も，今回の教材では表せず，今後の課題であると思われる。

以上の考察より、本稿冒頭で示されている数学する学習モデルは、以下のように修正される。



＜引用文献＞

1)文部省(1989)「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」，ぎょうせい，p.24

2)同，p.31

3)同，p.32

4)ﾎﾞｲﾔｰ(1983)（加賀美鐵雄・浦野由有訳)「数学の歴史1」朝倉書店，pp.75-76 。彌永昌吉，伊東俊太郎，佐藤徹（1979)「ｷﾞﾘｼｬの数学」共立出版，pp.34-40 を参照して，この展開を考案した。

5)ここでは、証明とは、数値を文字で置き換え、その文字式による計算を指している。

＜参考文献＞

倉井庸維(2001a).思考実験を含む数学するモデルの設計，筑波数学教育研究，第20号，49-56

倉井庸維.(2001b). 数学の学習における思考実験の規定とその活用に関する研究，日本数学教育学会誌，第83巻，第9 号，2-9

ｴﾙﾝｽﾄ・ﾏｯﾊ(1971).思考実験について，認識の分析(pp.101-124)，(廣松渉・加藤尚武編訳)，法政大学出版局.(E.Mach(1926).Uber Gedanken Experimente, Erkenntnis und Irrtum(pp.182-200), Leipzig Verlag von Johann Ambrosius Barth.)

Polya, G.(1973). Induction and Analogy in Mathematics, Volume 1 of Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press