【カテゴリーⅠ】

日本建築学会計画系論文集 第532号, 171-176, 2000年6月
J. Archit. Plann. Environ. Eng., AIJ, No. 532, 171-176, Jun., 2000

p-メディアン問題における規模密度法則の成立性

A TEST OF THE SIZE-DENSITY HYPOTHESIS IN *p*-MEDIAN PROBLEMS

鈴木　勉*
Tsutomu SUZUKI

This paper is devoted to test the size-density hypothesis in classical *p*-median problems in which the sum of users' travel distance is minimized. It is known that multisource Weber problems on a continuous plane show the relationship that the facility size is proportional to the demand density raised to the one-third power. By using numerical examples, we show that the relationship sufficiently holds also in large size *p*-median solutions with the Delaunay network. We lose somewhat this relationship with less connected network such as the minimum spanning tree or an actual network, but some relationship still exists between the facility size and the demand density. This rule can be applied to seeking approximate solutions of *p*-median problems.

Keywords: *demand density, facility size, facility location, large size p-median problem, size-density hypothesis*
需要密度，施設規模，施設配置，大規模*p*-メディアン問題，規模密度仮説

1．はじめに

オペレーションズ・リサーチ(OR)手法による施設配置問題はこれまで盛んに研究されてきており，それらの研究目的の多くは厳密な最適解を求める手法に主眼が置かれてきた．しかし，建築・都市計画分野での地域施設計画への応用の観点からは，必ずしも唯一の厳密な解を求めることを必要とはせず，いくつかの最適に近い解を大凡求めておくことの方が重要であると思われる場合が多い．このような大略解を求める方法も重要な研究課題であると考えられるにもかかわらず，今日までの研究例は数少ない．

施設配置計画の評価指標の中でも，総移動距離の最小化といういわゆる minisum 基準は，数多くの種類の施設に適用できるものとして広範に応用されている．離散的な需要分布に対し，施設が連続平面上の任意の場所に立地可能な場合は多施設ウェーバー問題(multisource Weber problem)として定式化でき，離散的な点又はネットワーク上に立地可能な場合は*p*-メディアン問題(*p*-median problem)として定式化できる．需要点数や施設数が大規模な場合は，一般に，これらの問題の大域的最適解を求めることは困難である．

しかし，施設需要が空間上で滑らかな連続分布として与えられる場合の多施設ウェーバー問題の最適解では，鈴木(1999)により整理されているように，いわゆる規模密度法則が成立することがわかっている．規模密度法則とは，最適な状態での一施設が受け持つ面積（圏域規模）は，需要密度の-2/3 乗に比例するというものである．このように，minisum 型施設配置問題を連続需要分布・連続立地問題として定式化し，この性質を用いれば，需要の多寡によって施設数の多寡にどの程度差を持たせるかについて，大凡の見当をつけることができ，大略解を導くことが可能である．

ところが，実際の施設配置計画に際しては，空間的集計データとして与えられた需要分布を用いるために，あるいは，現実の交通条件を反映するために，*p*-メディアン問題として定式化したい場合も多い．需要点数や施設数が大規模な場合，NP 困難な組合せ最適化問題であるこの問題を解くことは難しい．しかし，元来多施設ウェーバー問題と同じ minisum 基準である *p*-メディアン問題でも，規模密度法則はある程度成り立つであろうと考えられる．もしこの法則が成り立つならば，その性質を利用して *p*-メディアン問題についても大略解の導出が可能になることが期待される．

本研究は，大規模な *p*-メディアン問題において厳密解の得られるケースを対象にして，規模密度法則がどの程度成り立つかを分析することを目的とする．２章では規模密度法則についてレビューを行い，３章では大規模な *p*-メディアン問題での法則成立性の検証方法について論じる．そして４章では，東京大都市圏の市区町村別位置・

* 筑波大学社会工学系　講師・博士(工学)

Assistant Prof., Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Dr. Eng.

人口データを用いた実例から，法則の成立性を検討する．最後に5章で本論文の結論と課題をまとめる．

2．規模密度法則

施設に対する需要（利用者）が連続で滑らかな分布であるとし，連続平面上に複数の施設を立地させる minisum 型配置問題を考える．但し，以下の仮定が成り立つものとしておく．

①施設としては，人口分布や利用需要をベースとして社会的公平性が重視されるものを想定し，提供するサービスを利用者が出向いて享受し，その後，元の場所に戻るような出向き型施設を対象とする．
②施設利用者は最近隣の施設を選択する．
③施設利用頻度は移動費用に依存せず一律である．
④移動費用は施設までの直線距離に比例する．
⑤施設費用（建設・運用）は，利用者の多寡によって決まる施設規模に依存しない．つまり，総施設数が一定の場合，施設費用は定数として無視できる．
⑥施設数は十分に多く，施設数密度は連続量として扱える．また，施設の近傍における需要は一様分布である．

需要密度が一様でない平面領域を考える．この領域内の地点 x 近傍の微小領域における需要密度（所与）及び施設数密度が，それぞれ $h(x)$, $n(x)$と表されるとする．設置できる総施設数が与えられているとき，施設までの平均距離を最小化する施設数密度 $n(x)$は，人口密度 $h(x)$を用いて

$$n(x)=C_1\{h(x)\}^{2/3} \tag{1}$$

となることが導かれる（鈴木, 1999 を参照）. 但し, C_1は定数である．すなわち，施設数密度が需要密度の 2/3 乗に比例する状態が総距離の最小をもたらすということができる．

この関係式は，栗田(1999)による施設の建設運営費用と利用者の移動費用の総和を最小化する施設数を決定するモデルで得られた，最適施設数 N が需要 H の 2/3 乗と対象領域面積 S の 1/3 乗とに比例するという関係

$$N \propto H^{2/3}S^{1/3}$$

を，面積で除したものと等価の関係にある（$n=N/S$, $h=H/S$）．

上の(1)式の関係が満たされるとき，x に立地する一施設がサービスする面積（圏域規模）$a(x)$は，施設数密度 $n(x)$に逆比例するので，

$$a(x)=C_2\{h(x)\}^{-2/3} \tag{2}$$

となる（但し C_2は定数）．また，これに需要密度を乗じた

$$s(x)=a(x)h(x)=C_3\{h(x)\}^{1/3} \tag{3}$$

は，施設に容量制約がないとした場合に施設が受け持つ需要であり，施設規模を表すものと考えることができる（但し C_3は定数）．このようにして，圏域規模が需要密度の-2/3 乗に比例する，あるいは，施設規模が需要密度の 1/3 乗に比例するという規模密度法則が導かれる．

この法則が意味するところは，各地域の施設数，圏域規模，あるいは施設規模を，全地域で(1)～(3)式のいずれかが成り立つように調整すれば，全体として minisum 型配置が得られるということである．このことは理論的に重要であるばかりでなく，施設整備の配分を決定する際に基準として用いることなどにより，実用上も応用可能な性質である．

3．大規模 p-メディアン問題における規模密度法則の成立性

施設需要として用いる人口などのデータは，一般に，空間的に集計されたデータである．現実には，このような集計データを用いたり，現実の交通ネットワーク等の空間構造を反映させたりして，p-メディアン問題として定式化した minisum 型配置問題を解きたいことも少なくない．ところがこのような問題は大規模な問題になりがちであり，最適解を見つけることは困難になる．しかし，このような場合にも規模密度法則が成り立てば，前章で論じたように需要に対応して施設数や規模を調整することにより，大凡の解を求めることができる．ここでは，解ける範囲で大規模 p-メディアン問題の解を得て，その解について規模密度法則が成り立つかどうか検証する方法を提示する．

大規模 p-メディアン問題を解く方法については，既に多くの研究の積み重ねが見られ，線形緩和法(ReVelle and Swain, 1970; Morris, 1978), 双対勾配法，ラグランジュ緩和法(Galvão and Raggi, 1989)などの他様々な解法があるが，ここでは条件次第では厳密解を得ることのできる線形緩和法を用いることにする(Rosing, 1992; Rosing, Hillsman, and Vogelaar, 1979; Rosing, ReVelle, and Vogelaar, 1979 などを参照)．p-メディアン問題は，

$$\begin{aligned}\min_{\{Y_{ij}\}} \quad & \sum_i\sum_j H_i d_{ij} Y_{ij} \\ s.t. \quad & \sum_j Y_{ij}=1 \quad \forall i \\ & \sum_i Y_{ii}=p \\ & Y_{ij}-Y_{jj}\le 0 \quad \forall i,j \\ & Y_{ij}=0,1 \quad \forall i,j\end{aligned} \tag{4}$$

と表せる．但し，H_iはノード i の需要，d_{ij}は ij 間のネットワーク上距離，Y_{ij}はノード i の需要の施設 j への割当を表す 0-1 変数（Y_{ij}=1 の場合に需要 i を施設 j に割り当てる；Y_{ii}=1 となるノード i に施設が立地する）である．線形緩和法とは，4 番目の制約条件である Y_{ij}の 0-1 条件を非負条件

$$Y_{ij}\ge 0 \quad \forall i,j$$

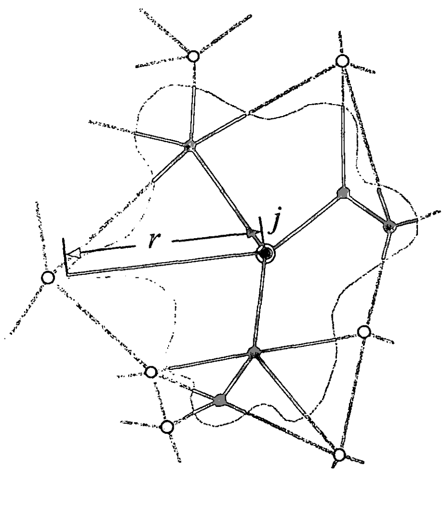

図1　需要密度の定義

で置き換えることにより，線形計画問題に変換して解く方法である．解は元の0-1条件を満たさない場合もあるが，多くの場合に0-1解をもたらすことが報告されている．

この問題の解 Y_{ij}*においてノード j に施設が立地した場合，その施設規模 s_j は，Y_{ij}*=1となる i の需要 H_i の総和で与えられるので，

$$s_j = \sum_{i \in A_j} H_i \qquad (5)$$

で与えられる．但し，$A_j=\{i|Y_{ij}*=1\}$である．これに対してノード j 近傍の需要密度 h_j については，そのノードから距離 r 未満の範囲にある需要の総和を半径 r の円の面積で除した

$$h_j = \frac{\sum_{i \in N_j} H_i}{\pi r^2} \qquad (6)$$

で定義する（図1）．但し，r は所与の値とし，N_jは i からネットワーク上距離が r 未満にあるノードの集合，すなわち $N_j=\{i|d_{ij}<r\}$である．ここで，r の与え方が問題となるが，小さすぎると局地的な需要しか反映されず，極端に小さいと無限大となり需要密度の意味を失う．逆に大きすぎると需要の疎密が均されてしまい，近傍の需要密度を表しているとは言い難くなる．そこで基本的には，各施設の圏域と同じくらいの大きさとなるような円の半径を r として用いることにする．厳密には施設密度が場所により異なることから圏域のサイズも場所により異なるが，r は一定値を用いることにする．

上の s_j と h_j を用いて，(3)式と同様の関係

$$s_j = C_3 h_j^{1/3} \qquad (7)$$

が成立するかを調べることにより，規模密度法則の成立性を検証する．

4．東京大都市圏での実例に基づく成立性の検討

3章の議論にしたがい，ここでは千代田区を中心とする半径約70km圏内に含まれる東京大都市圏市区町村の役所役場位置・人口

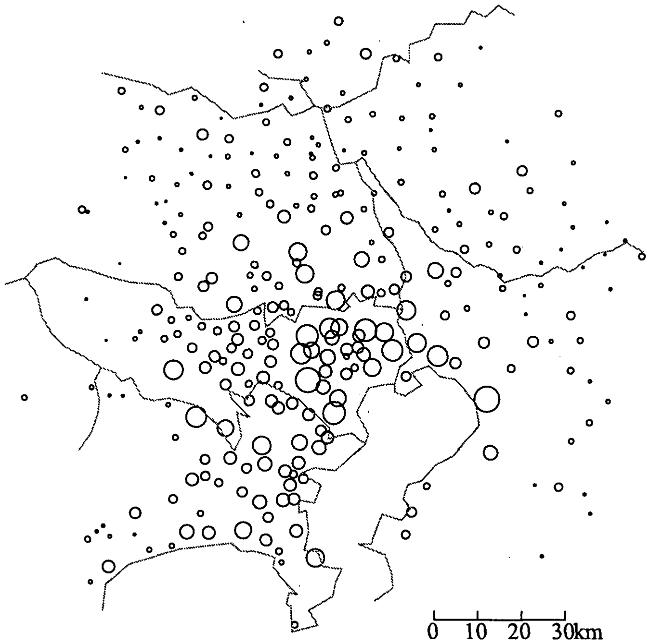

図2　需要分布（1990年国勢調査人口）

データを用いて，p-メディアン問題の厳密解を線形緩和法によって求め，施設規模と施設立地点近傍の需要密度の関係を分析する．

対象とする東京大都市圏280市区町村の1990年国勢調査による人口分布（役所役場を位置の代表とする）を，図2に円の面積で示す．本章では，例として需要が人口に比例するような施設を想定し，人口を各市区町村の施設に対する需要と考える．これらのノードを結ぶネットワークは無数に考えられるが，ここではまず図3に示したDelaunay網と最小木(minimum spanning tree)の2種のネットワークを例に計算する．完全グラフの場合は連続平面と同じ空間条件となるが，Delaunay網でも連続平面に近い空間条件をもたらすため，規模密度法則もほぼ成立するであろうと考えられる．ここでは線形計画問題のサイズをなるべく抑えるためにDelaunay網を取り上げる．また，現実には地理的条件などにより隣接していながら分断され迂回が必要な状況も考えられることから，リンクが疎なネットワークの極端なケースとして最小木についても計算を試みる．それぞれのネットワークの場合について d_{ij} を計算し，これを用いて(4)の問題を解くことにする．

それぞれのネットワーク上での p=28 のときの p-メディアン解は図4のようになる（どちらの場合も0-1解が得られる）．これらの解について，28個の施設の施設規模 s_j と，その立地点の近傍の需要密度 h_j を3章にしたがい計算すると，図5に示すような関係が得られる．ここで r は，対象地域の総面積を施設数 p で除したものを一施設当たりの平均的な圏域面積とし，それと等積の円の半径に近い値である15kmとした（以下の計算でも同様）．これらの関係を(7)式から導かれる一般式

$$s_j = C_3 h_j^{\alpha} \qquad (8)$$

に当てはめるように，quasi-Newton法による最小二乗法を用いて回帰分析を行うと，推定結果は次のようになる．

Delaunay網：　$s_j = 346168 h_j^{0.345}$　(R^2=0.761)　(9)

最小木：　$s_j = 342030 h_j^{0.421}$　(R^2=0.646)　(10)

回帰曲線は図5中に記したようになる．Delaunay網の場合，α の推定値はほぼ1/3となり，(7)式の関係，すなわち，連続平面上で成立する規模密度法則と同様の関係がほぼ成り立つことがわかる．一方，最小木の場合，α の推定値は1/3よりも大きめの値となり，(8)式への適合性も良くないことがわかる．このことは同じ需要分布であっても，ネットワークの接続の程度の違いがこの関係の頑健性に影響することを意味している．

施設数 p による違いも調べるため，異なる p による検討を行った結果を説明済み分散比 R^2 とともに表1（Delaunay網），表2（最小木）に示す．双方のネットワークについて0-1解が得られた p=10, 19, 28, 40, 56, 70の場合について比較している．また，p が増えるにしたがい，施設の近傍の範囲を小さくするために，r も小さい値に設定している．表1より，Delaunay網の場合の α の推定値は p=10の場合を除いて1/3に近い値で安定しており，法則の成立が頑健であることがわかる．施設数が少なくなると，プロット点数が少なくなるので R^2 は1に近づくが，一施設当たりの圏域規模が大きくなり，圏域内で需要が一様であるという2章で論じた仮定⑥の条件が満たされなくなるため，法則

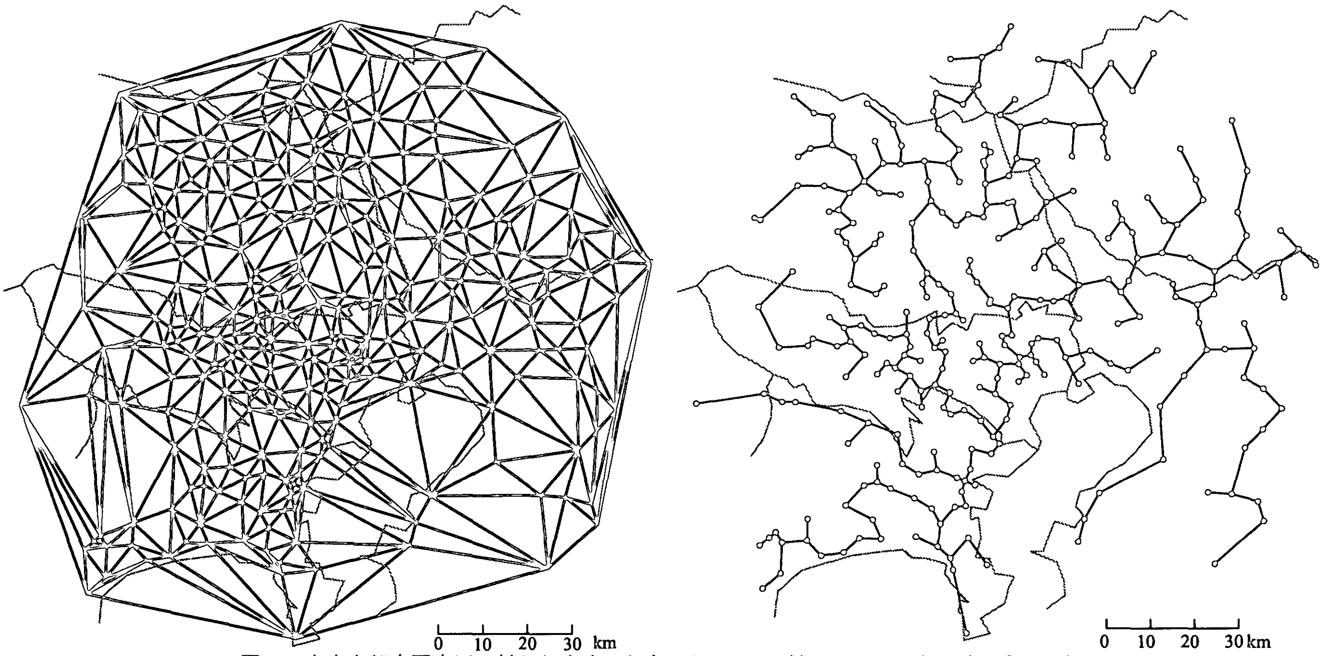

図３　東京大都市圏市区町村から生成したネットワーク（左：Delaunay網，右：最小木）

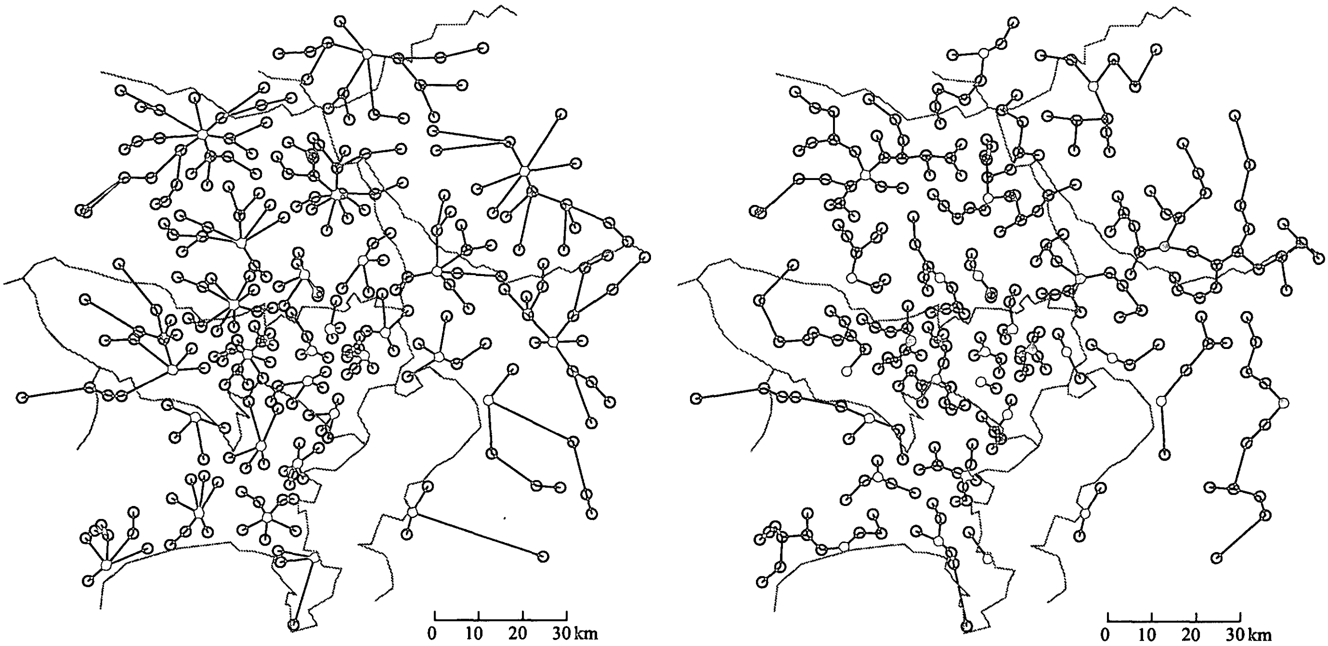

図４　*p*-メディアン問題の解（p=28）（左：Delaunay網，右：最小木）

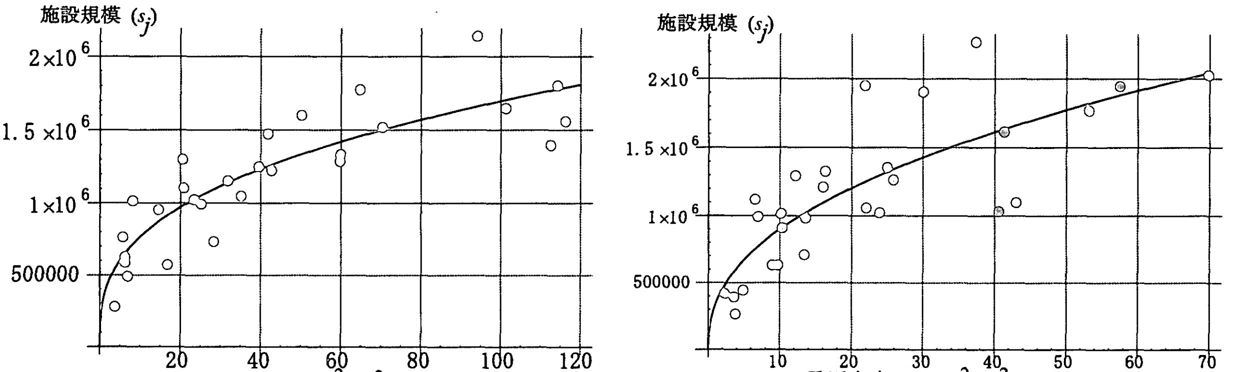

図５　需要密度と施設規模の関係（p=28）（左：Delaunay網，右：最小木）

が成り立たなくなるものと考えられる．逆に，施設数が極端に多くなると，施設に帰属する需要点数が少なくなり，需要の一様性が崩れていくと思われ，やはり法則は成り立たなくなるものと推測される．しかし，需要4ノード当たり施設1ヶ所の割合であるp=70の場合でも，ほぼ1/3乗になることが明らかになった．

この性質を利用すると，対象地域内の需要密度の分布を把握し，その1/3乗に比例するような需要規模を持つp個の地域へ区分することによって，大略解を求めることが可能である．

最小木の場合はαの推定値は安定せず，p=28の場合同様，1/3より大きめの値となることがわかる．この場合は，空間の2次元平面としての性質がかなり失われ，むしろ1次元に近い空間条件になるため，法則が成立しにくくなるものと考えられる．

しかし，施設は次数の高い分岐点ノードに立地する傾向があり，図4の例でもわかるように，需要密度の高い場所の施設数密度が高いという立地パターン上，Delaunay網の場合と大きな差は見られない．需要密度と施設規模の関係についても，頑健性は多少失われるものの，αが0.4〜0.5の範囲で(8)式の関係が成立すると解釈することが可能

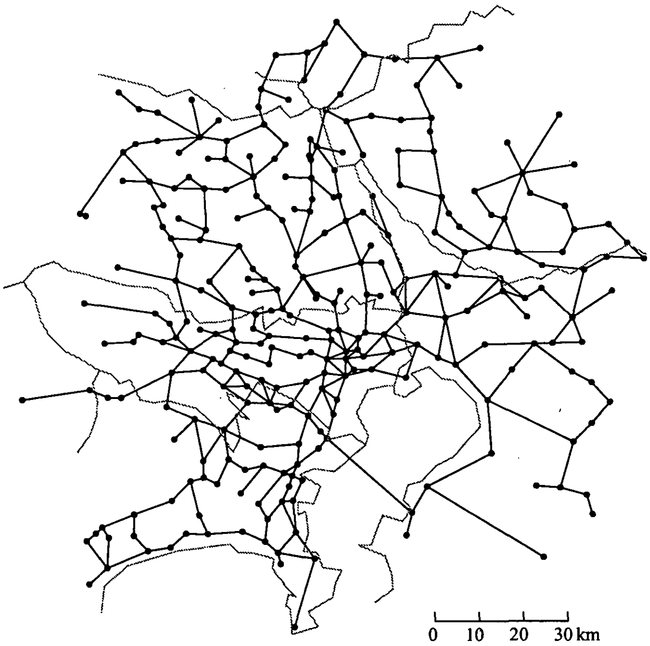

図6　現実の交通条件に近いネットワーク

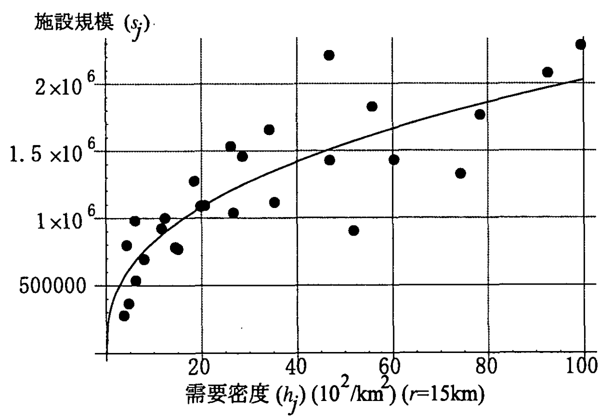

図7　需要密度と施設規模の関係(p=27)（現実ネットワーク）

表1　施設数pを変化させたときの推定結果（Delaunay網）

P	r (km)	$\hat{C}_3$	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	338951	0.642	0.94489
19	15	447609	0.375	0.74489
28	15	346168	0.345	0.76098
40	10	249245	0.329	0.66853
56	10	160859	0.365	0.60495
70	10	138109	0.344	0.52008

表2　施設数pを変化させたときの推定結果（最小木）

P	r (km)	$\hat{C}_3$	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	865514	0.451	0.58461
19	15	380288	0.496	0.75266
28	15	342030	0.421	0.64632
40	10	159401	0.507	0.74844
56	10	134673	0.474	0.71685
70	10	146284	0.380	0.55419

表3　現実ネットワークのときの推定結果

P	r (km)	$\hat{C}_3$	$\hat{\alpha}$	R^2
10	20	563881	0.538	0.95510
27	15	337492	0.389	0.70482
56	10	195678	0.326	0.54128
70	10	136378	0.376	0.59510

であり，最小木の場合のp-メディアン問題の大略解求解にもこの性質を利用する可能性は充分あるものと考えられる．

現実の交通網は，Delaunay網よりも疎，最小木よりも密であり，両者の中間であると考えられる．そこで，より実際に近い交通網での法則の頑健性を確かめるために，多少恣意的にならざるを得ないが，Delaunay網のリンクの中から，現在，鉄道・バスなどの公共交通機関が整備されている隣接市区町村のリンクのみを取り出したネットワークを作成し，同様の検討を行った．図6に対象としたネットワークを示し，(8)式への回帰の結果を0-1解が得られた施設数pについてのみ表3に示す．また，例としてp=27の場合の需要密度と施設規模の関係を図7に示す．

この結果，説明される分散比は小さいものの，現実の交通条件を想定した場合でもαは0.3〜0.5の範囲にあると見なして問題ないであろうことが読みとれる．p=10は例外と見なせば，αは概ねDelaunay網の場合と最小木の場合の中間の値となることが推測される．このように，現実の交通条件に近いネットワークを与えた場合でも，おおよそ規模密度法則が成立することが確認された．

5．結論と今後の課題

本論文では，連続空間でのminisum型配置モデルで成り立つ規模密度法則について，p-メディアン問題での成立性を検討し，以下のような結論を導いた．

①大規模なp-メディアン問題について規模密度法則を検証する方法を提示し，東京大都市圏市区町村を例にp-メディアン問題の厳密解を求め，法則の成立性を検証した．

②その結果，ネットワークがDelaunay網である場合，施設規模は需要密度のほぼ1/3乗に比例し，規模密度法則がほぼ成立することが明らかになった．

③ネットワークが最小木である場合は，べき数の推定値は安定せず，

規模密度法則の成立性はやや崩れるが，施設規模はおおむね需要密度の 0.4～0.5 乗に比例するといえる．

④現実の交通条件に近いネットワークを与えた場合でも，おおよそ施設規模は需要密度の 0.3～0.5 乗に比例するという関係が見いだされ，Delaunay 網の場合と最小木の場合の中間のケースとなるであろうことが確認された．

これらの性質を使えば，対象地域内の需要分布を把握し，そのべき乗に比例する地域区分を行うことによって大略解を得ることができ，厳密解の求解が困難な大規模問題に対する良好な近似解としたり，ヒューリスティクス解法の初期解とすることができるであろう．

規模密度法則を利用した大略解求解の具体的手法の検討，異なる需要分布を持つ他の地域での検討，需要分布の滑らかさと法則の成立性との関係などについては，今後の研究課題としたい．また，施設のはたらきに応じて施設の分布形態は様々な形をとり得る(日本建築学会編，1995)が，本研究では規則的な分散型配置となるような公共性が高く公平性に重点が置かれる施設を対象とした．Minisum 型の評価基準にそぐわない，他の型の施設については，これとは別のアプローチが必要となろう．

筑波大学腰塚武志教授，大澤義明助教授，南山大学鈴木敦夫教授，慶應義塾大学栗田治助教授には貴重なご意見を頂いた．また，筑波大学社会工学研究科の大津晶氏には作業上お世話になった．ここに記して謝意を表します．なお，本論文は平成 11 年度科学研究費補助金（奨励研究（A）：課題番号 10780273）による研究成果の一部である．

参考文献

1) Daskin, M.S.: *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, 1995.
2) Galvão, R.D. and Raggi, L.A.: "A Method for Solving to Optimality Uncapacitated Location Problems," *Annals of Operations Research*, **18**, 225-244, 1989.
3) Gusein-Zade, S.M.: "Alternative Explanations of the Dependence of the Density of Centers on the Density of Population," *Journal of Regional Science*, **33**, 4, 547-558, 1993.
4) 建設省国土地理院：日本の市区町村役所・役場経緯度一覧，1991.
5) 栗田治：「都市施設の適切な数に関する数理モデル　―政令指定都市の区数に関する分析例―」，日本建築学会計画系論文集，524，169-176，1999.
6) Morris, J.G.: "On the Extent to Which Certain Fixed-Charge Depot Location Problems Can be Solved by LP," *Journal of Operational Research Society*, **29**, 1, 71-76, 1978.
7) 日本建築学会編：地域施設の計画，丸善，1995.
8) Okabe, A., Okunuki, K. and Suzuki, T.: "A Computational Method for Optimizing the Hierarchy and Spatial Configuration of Successively Inclusive Facilities on a Continuous Plane," *Location Science*, **5**, 4, 255-268, 1997.
9) 大澤義明：「施設配置理論モデル」，日本建築学会編：建築・都市計画のためのモデル分析，136-149，1992.
10)大澤義明：「地域施設計画モデルにおける計画施設数と最適配置及び最適距離との関係」，日本建築学会計画系論文集，482，165-174，1996.
11)Palmer, D.S.: "The Placing of Service Points to Minimize Travel," *Operational Research Quarterly*, **24**, 121-123, 1973.
12)ReVelle, C.S. and Swain, R.W.: "Central Facilities Location," *Geographical Analysis*, **2**, 30-42, 1970.
13)Rosing, K.E.: "An Optimal Method for Solving the (Generalized) Multi-Weber Problem," *European Journal of Operational Research*, **58**, 414-426, 1992.
14)Rosing, K.E., Hillsman, E.L., and Vogelaar, H. "A Note Comparing Optimal and Heuristic Solutions to the *p*-Median Problem," *Geographical Analysis*, **11**, 1, 86-89, 1979.
15)Rosing, K.E., ReVelle, C.S., and Vogelaar, H.: "The *p*-Median and its Linear Programming Relaxation: An Approach to Large Problems," *Journal of Operational Research Society*, **30**, 9, 815-823, 1979.
16)日本統計協会：統計データファイル 平成 2 年国勢調査.
17)Stephan, G.E.: "International Tests of the Size-Density Hypothesis," *American Sociological Review*, **37**, 365-368, 1972.
18)Stephan, G.E.: "The Distribution of Service Establishments," *Journal of Regional Science*, **28**, 1, 29-40, 1988.
19)鈴木勉：「移動損失基準による地域施設密度と人口密度の理論的関係に関する研究」，日本建築学会計画系論文集，521，183-187，1999.

（1999年 8 月30日原稿受理，2000年 1 月28日採用決定）