

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540064

研究課題名(和文) 対称空間の対蹠集合の研究およびその拡張と応用

研究課題名(英文) Study of antipodal sets in symmetric spaces with its extension and application

研究代表者

田崎 博之 (TASAKI, Hiroyuki)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：30179684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクト型Hermitian対称空間内の二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を、田中真紀子氏、井川治氏との共同研究で解明し、離散的な交叉がある種のWeyl群の軌道になることを証明した。入江博氏、酒井高司氏との共同研究で、この成果を部分的に複素旗多様体内の二つの実形の交叉に拡張した。また、有向実Grassmann多様体内の対蹠集合が組合せ論的対象と対応することを示し、階数が4以下の場合に分類を完成させた。

研究成果の概要(英文)：We showed a necessary and sufficient condition for the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type to be discrete and proved that the discrete intersection is an orbit of a Weyl group in a joint work with Makiko Tanaka and Osamu Ikawa. We partly extended these results to two real forms in a complex flag manifold in a joint work with Hiroshi Iriyeh and Takashi Sakai. We associated antipodal sets in real oriented Grassmann manifolds with certain combinatorial objects and classified antipodal sets in the case where the rank is less than 5.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 対蹠集合 実形の交叉 複素旗多様体 有向実Grassmann多様体 対称三対

1. 研究開始当初の背景

科学研究費 基盤(C)「等質空間の微分幾何学・積分幾何学とその応用」(2009年度～2011年度)による研究成果から、対称空間の対蹠集合およびその複素旗多様体の場合への拡張が対称空間および複素旗多様体の幾何学的性質や二つの実形の交叉の記述に有効であることがわかり、本研究に着手した。

2. 研究の目的

本研究の研究目的は以下の3項目である。

I. 対蹠集合の基本的性質と二つの鏡映部分多様体の交叉の対蹠性を解明する。この情報から鏡映部分多様体による交叉積分公式の精密化を行う。

II. 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合を具体的に表示する。その結果を利用して高次交代形式の標準形を有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合によって記述する。さらに外積代数の mass や comass 等のノルムの精密な評価に応用する。

III. 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉の対蹠性を解明し、二つの実旗多様体に関する Floer ホモロジーへ応用する。

3. 研究の方法

I. 対称空間の制限ルート系と Weyl 群の作用を利用して、対称空間と複素旗多様体の対蹠集合の性質を調べる。二つの鏡映部分多様体の交叉を調べるには、鏡映部分多様体を定める二つの対合に関して制限ルート系を分解して扱うことが有効なことは、今までの二つの実形の交叉の研究からわかっている。この手法をより一般の二つの鏡映部分多様体の交叉に適用する。

II. 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合については組合せ論的な手法が有効であるので、組合せ論の手法を修得しながら研究を進める。さらに不変交代形式や有向実 Grassmann 多様体のトポロジーに関する情報との関連性にも注目して研究を進める。

III. 複素旗多様体内の二つの実形の交叉に関する研究は、コンパクト型 Hermitian 対称空間の場合と同様に実形を定める二つの対合に関するルート系の分解を利用する。

4. 研究成果

I. この後の論文リストの論文 12 で発表したコンパクト型 Hermitian 対称空間内の二つの実形の交叉の対蹠性に関する連携研究者田中真紀子氏との共同研究を進展させた。既約コンパクト型 Hermitian 対称空間内の実形はすでに分類されていたが、既約ではない場合も明らかにし、さらに二つの実形の交叉の組合せを決定した。これに基づいて交叉がどのような対蹠集合になるかを決定した。これらの成果は論文 5 で発表した。さらに、連携研究者の井川治氏、田中氏との共同研究で正則等長変換の固定点集合と二つの実形の交叉の関係、二つの実形の交叉が離散的になるための

必要十分条件を明らかにした。これらの結果はまず複素 Grassmann 多様体の場合に明らかにし論文 8 で発表した。一般のコンパクト型 Hermitian 対称空間の場合の成果は論文 2 にまとめた。

II. 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合が有限集合のある性質を持つ部分集合族に対応することを論文 10 で発表した。これは実 Grassmann 多様体が対称 R 空間であることから、論文 11 の結果と有向実 Grassmann 多様体から実 Grassmann 多様体への二重被覆写像を利用して示すことができた。さらにこれを利用して階数が 4 以下の場合に極大対蹠集合を分類した。この分類に現れた極大対蹠集合の系列を一般化し、階数が 5 以上の場合にも基本的な極大対蹠集合の系列を構成し、論文 6 で発表した。階数が 4 以下の場合には、分類結果から例外的な場合を除けば極大対蹠集合の大きさの最大値を与える系列が存在することがわかるが、階数が 5 以上の場合にも同様な現象が成り立つことが期待できる。階数 5 の場合にある極大対蹠集合の系列が最大値を与え、さらに最大値を与える対蹠集合はこれに限ることを証明した。この結果は論文 1 にまとめた。

III. 論文 12 で得たコンパクト型 Hermitian 対称空間内の二つの実形の交叉の対蹠性を利用して、二つの実形に関する Floer ホモロジーを求めることができた。さらにこの Floer ホモロジーの結果を利用してある種の実形の Hamilton 体積最小性を証明し、結果は論文 9 で発表した。これらの成果を複素旗多様体の場合に一般化するために、複素旗多様体における対蹠性について考えた。複素旗多様体には一般化された対称空間の構造があるため、これを利用して対蹠集合の概念を一般化し、この観点から複素旗多様体内の対蹠集合について考えた。コンパクト型 Hermitian 対称空間の場合と同様に、いくつかの複素旗多様体内の二つの実形の交叉が対蹠集合になることを証明し、論文 4,7 にまとめた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

1 H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Intern. J. Math. 査読有(掲載決定)

2 O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, Intern. J. Math. 査読有(掲載決定)

3 M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: 'The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type', J. Math. Soc. Japan 査読有(掲載

決定)

- 4 H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 査読有(掲載決定)
- 5 M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, *J. Math. Soc. Japan* 査読有 67 (2015), 275-291
- 6 H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, *Springer Proc. in Mathematics & Statistics* 査読有 106, (2014), 515-524
- 7 H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, *Springer Proc. in Mathematics & Statistics* 査読有 106, (2014), 391-399
- 8 O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry and the intersection of two real forms in the complex Grassmann manifold, *Springer Proc. in Mathematics & Statistics* 査読有 106, (2014), 319-327
- 9 H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. Japan* 査読有 65 no.4 (2013), 1135-1151
- 10 H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, *Internat. J. Math.* 査読有 24 no.8 (2013), 1350061-1-28
- 11 M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric S^2 -spaces, *Osaka J. Math.* 査読有 50 no.1 (2013), 161-169
- 12 M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有 64 no.4 (2012), 1297-1332

[学会発表](計 51件)

- 1 酒井高司, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, 研究集会「ラグランジュ幾何と幾何学流」2015年3月28日、蔵王KKR白銀荘(山形県山形市)
- 2 田中真紀子, Antipodal sets of symmetric R-spaces and their application, Oberseminar Differentialgeometrie 2015年3月26日、University of Augsburg, Germany
- 3 奥田隆幸, 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉、日本数学会2015年度年会2015年3月22日、明治大学(東京都千代田区)
- 4 田崎博之, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Hakata Workshop 2015 2015年2月15日、Reference Eki Higashi Building(福岡県福岡市)

- 5 田崎博之, 複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉、広島大学大学院理学研究科数学専攻談話会2014年12月9日、広島大学(広島県東広島市)
- 6 田崎博之, 複素旗多様体内の二つの実形の交叉、部分多様体論・湯沢2014 2014年11月20日、湯沢グランドホテル(新潟県湯沢町)
- 7 酒井高司, 複素旗多様体内の二つの実形の交叉、福岡大学微分幾何研究会2014年11月2日、福岡大学(福岡県福岡市)
- 8 田崎博之, 対称空間の対蹠集合、広島幾何学研究集会2014 2014年10月10日、広島大学(広島県東広島市)
- 9 井川治, 対称三対の基礎と応用、幾何学学科会特別講演、日本数学会2014年度秋季総合分科会2014年9月25日、広島大学(広島県東広島市)
- 10 田崎博之, 対蹠的部分集合の系列と評価、日本数学会2014年度秋季総合分科会2014年9月25日、広島大学(広島県東広島市)
- 11 酒井高司, 複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造、日本数学会2014年度秋季総合分科会2014年9月25日、広島大学(広島県東広島市)
- 12 酒井高司, 複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造、研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2014」2014年9月5日、東京理科大学森戸記念館(東京都新宿区)
- 13 井川治, 対称三対の実形の交叉への応用、幾何学シンポジウム2014年8月24日、名城大学(愛知県名古屋市)
- 14 酒井高司, 複素旗多様体内の実形の交叉の対蹠性、幾何学シンポジウム2014年8月23日、名城大学(愛知県名古屋市)
- 15 酒井高司, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds 2014年8月11日 NIMS, Daejeon, Korea
- 16 田崎博之, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds 2014年8月11日 NIMS, Daejeon, Korea
- 17 田中真紀子, The fixed point set of a holomorphic isometry and the intersection of two real forms in the complex Grassmann manifold, ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds 2014年8月10日 NIMS, Daejeon, Korea
- 18 井川治, Symmetric triads and their applications, RIMS 研究集会「群作用と部分多様体論の展開」2014年6月26日、京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
- 19 酒井高司, Antipodal structure of the intersection of real forms and its applications 幾何コロキウム2014年6月19日、東京大学(東京都目黒区)
- 20 田崎博之, 複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造、筑波大学微分幾何学火曜

セミナー 2014 年 6 月 17 日、筑波大学(茨城県つくば市)

21 田崎博之、対蹠的部分集合の系列と評価、離散数理セミナー 2014 年 6 月 6 日、山形大学(山形県山形市)

22 田崎博之、複素 Grassmann 多様体の正則等長変換の不動点集合と二つの実形の交叉、筑波大学微分幾何学火曜セミナー 2014 年 5 月 13 日、筑波大学(茨城県つくば市)

23 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の系列と評価、筑波大学微分幾何学火曜セミナー 2014 年 4 月 15 日、筑波大学(茨城県つくば市)

24 田中真紀子、Fixed point sets of holomorphic isometries of Hermitian symmetric spaces, Oberseminar Differentialgeometrie 2014 年 3 月 27 日 University of Augsburg, Germany

25 酒井高司、Antipodal structure of the intersection of real forms and its applications, Seminars 2014 年 3 月 11 日 University of California, Irvine, USA

26 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の系列と評価、組合せ数学セミナー、2014 年 2 月 7 日 東京大学駒場キャンパス(東京都目黒区)

27 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合、離散数理セミナー、2013 年 11 月 29 日 山形大学理学部(山形県山形市)

28 井川治、正則等長変換の不動点集合、実形の交叉と対称三対、部分多様体論・湯沢 2013、2013 年 11 月 23 日 湯沢グランドホテル(新潟県湯沢町)

29 田崎博之、極大対蹠的部分集合の系列、部分多様体論・湯沢 2013、2013 年 11 月 22 日 湯沢グランドホテル(新潟県湯沢町)

30 田中真紀子、Fixed point sets of isometries and the intersection of real forms in a Hermitian symmetric space of compact type, The 17th International Workshop on Differential Geometry 2013 年 9 月 30 日 NIMS, Daejeon, Korea

31 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会 2013 年 9 月 24 日 愛媛大学(愛媛県松山市)

32 井川治、二つの実形の交叉と対称三対、研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2013」2013 年 8 月 21 日 東京理科大学森戸記念館(東京都新宿区)

33 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合、東北大学組合せ論セミナー、2013 年 8 月 6 日 東北大学(宮城県仙台市)

34 酒井高司、複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造、研究集会「部分多様体の微分幾何学の深化」2013 年 6 月 25 日 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

35 田中真紀子、Geometry of symmetric S^2 -spaces, 小林昭七先生記念シンポジウム 2013 年 5 月 23 日 東京大学(東京都目黒

区)

36 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合、首都大学東京幾何学セミナー 2013 年 4 月 26 日 首都大学東京(東京都八王子市)

37 田中真紀子、コンパクト対称空間の対蹠集合と全測地的部分多様体の交叉、幾何学分科会特別講演、日本数学会 2013 年度年会 2013 年 3 月 21 日 京都大学(京都府京都市)

37 入江博、Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces and its application, Symplectic Geometry Seminar 2013 年 3 月 18 日 ETH Zurich, Switzerland

38 田崎博之、Antipodal sets in compact Riemannian symmetric spaces, The 6th OCAMI-KNUGRG Joint International Workshop on Submanifold Theory in Symmetric Spaces and Lie Theory in Finite and Infinite Dimensions, 2013 年 2 月 3 日 大阪市立大学(大阪府大阪市)

39 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合、筑波大学微分幾何学火曜セミナー 2013 年 1 月 29 日、筑波大学(茨城県つくば市)

40 田崎博之、有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合、部分多様体論・湯沢 2012、2012 年 11 月 22 日 湯沢グランドホテル(新潟県湯沢町)

41 田中真紀子、The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, The 16th International Workshop on Differential Geometry 2012 年 11 月 1 日 Kyungpook National University, Korea

42 酒井高司、Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, The 16th International Workshop on Differential Geometry 2012 年 11 月 1 日 Kyungpook National University, Korea

43 酒井高司、複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造、首都大学東京幾何学セミナー 2012 年 10 月 12 日 首都大学東京(東京都八王子市)

44 田中真紀子、The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, Oberseminar Differentialgeometrie, 2012 年 10 月 2 日 University of Augsburg, Germany

45 酒井高司、複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 2012 年 9 月 18 日 九州大学(福岡県福岡市)

46 田崎博之、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉 II、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 2012 年 9 月 18 日 九州大学(福岡県福岡市)

47 田中真紀子、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉、研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2012」 2012 年 9 月 3

日 東京理科大学森戸記念館(東京都新宿区)
48 田中真紀子、コンパクト対称空間の対蹠
集合と部分多様体の交叉、部分多様体の微分
幾何学及び関連課題-前田定廣先生遺曆記念
研究集会-- 2012年8月6日 佐賀大学(佐賀
県佐賀市)

49 酒井高司、複素旗多様体の実形の交叉の
対蹠性、幾何学セミナー 2012年7月26日 明
治大学(神奈川県川崎市)

50 田崎博之、コンパクト型 Hermite 対称空
間の二つの実形の交叉 II、筑波大学微分幾何
学火曜セミナー 2012年6月19日、筑波大学
(茨城県つくば市)

51 田崎博之、複素旗多様体内の実旗多様体
の交叉の構造、筑波大学微分幾何学火曜セミ
ナー 2012年5月15日、筑波大学(茨城県つ
くば市)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.tsukuba.ac.jp/~tasaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田崎 博之 (TASAKI HIROYUKI)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：30179684

(2) 連携研究者

田中真紀子 (TANAKA MAKIKO)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：20255623

井川 治 (IKAWA OSAMU)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・

教授

研究者番号：60249745

酒井 高司 (AKAI TAKASHI)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：20255623

入江 博 (IRIYEH HIROSHI)

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：30385489