文字式の指導序説[(1)(2)]

Teaching of Symbolic Expressions: An Introduction

三輪辰郎（Tatsuro MIWA）
応用光学研究所
（Institute for Applied Optics）

われわれは、文字式を数学における主要な思考方法として位置づけ、その利用の図式（scheme）を提案する。それは、点で示される３つの状態：事象、文字式、文字式'と、線で示される３つの過程：表す、変形、読むから成る三角形状のものである。事象は、出発点・到達点となるものであり、３つの過程を一廻りすることで、新しい発見や洞察が得られることが期待される。文字式と文字式'を区別するのは、後者が前者を変形という過程を経たことを示すためである。

We propose Scheme for Use of Symbolic Expressions (SUSE) as a means of thinking mathematically. SUSE is composed of three states and and three processes and is of triangular diagram. Three states are Situations, Symbolic Expressions and Symbolic Expressions', and they are drawn as nodes in the triangular diagram. Three process are to Represent, to Transform and to Read, and they are drawn as segments in the diagram.

はじめに

中学校以上の数学において、われわれが文字式を使うのは、何故であろうか。当然過ぎることのように見えるこの問から出発することにしよう。

言うまでもなく、数学は科学の言語である。そして、文字式は数学の最も主要な言語である。したがって、文字式を使わないとすると、科学ー特に、自然科学ーは、伝達だけでなく思考の手段をも失うことになるであろう。数学自身においても、その主要な内容であり手段である代数、関数、解析幾何で、また、確率論、統計学で、文字式を使うことなしに、その内容を展開することは不可能ーもし、可能としても、極めて困難ーであるに違いない。それでは、どうしてそういうことが言えるのであろうか。

数学的事象においては、何らかのパターンを発見すること、それを表現すること、そのパターンが一般に成り立つかどうかを調べることが鍵となっているが、その際、文字式を使うことは殆ど不可欠であり、文字式より優れた手段はないように思われるのである。図形に表現しそれを直観することからパターンを発見することの

重要性を忘れてはならないが、それが一般に成り立つことを正当化したり、観察を紛れることなく他の人に伝達したりするには、図形の直観だけでは困難であると考えられるのである。こうした点に関して、決定的であると思われるのは、文字式は、それを変形することが許されることである。つまり、文字式は、変形によって、初めの表現とは異なった式が得られ、それを読むことによって新しい発見や洞察が得られることが極めて多いのである。このようにして、文字式は、最も有力な思考の手段となり得るのである。もちろん、文字式が伝達の手段として、簡潔かつ明瞭なものであることの価値は多くの人の指摘する通りである。

以上のように、文字式は、数学における思考の手段として、類のない価値高いものと言うことができる。それを踏まえながら、本稿では、

文字式利用の図式（scheme）を提示し、それに関する若干の考察を行うことにする。第１節で、図式を提示し、それを簡単に説明する。次いで、第２－４節で、図式の各要素についての考察を行う。それらは、現在の文字式の指導についての提言となることをも期待している。第５節は、まとめと今後の課題を与えることにする。本稿は、序説であり、なお多くの検討すべき課題を含んでいることは確かである。筆者も十分理解しているところで、今後一層の研究を進めることを期している。

1 思考の方法としての、文字式利用の図式

ここでは、文字式を数学における主要な思考方法として位置づける。そして、その利用の図式（scheme）として、次のものを提案する。

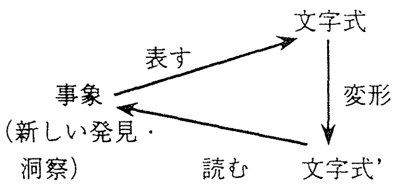

図1　文字式利用の図式

この図式は、点で示される３つの状態：事象、文字式、文字式'と、線で示される３つの過程：表す、変形、読むから成る三角形状のものである。事象は、出発点・到達点となるもので、問題、あるいは、パターン等、その場の状況によってさまざまの形をとる。３つの過程を一廻りすることで、新しい発見や洞察が得られることが期待され、それが到達点と考えられる。文字式と文字式'を区別するのは、後者が前者を変形という過程を経たことを示すためである。３つの過程、表す、変形、読むの意味や詳しい内容については、後に述べる。

この３つの過程のそれぞれに関しては、Reshaping School Mathematics（MSEB,1990）で、多少文脈は異なるが、表現（representation 数学問題を記号形式で表現し、これらの記号表現を関係、式、方程式で使う）、演算（operation 適切な記号手続きを決め、記号形式で表現された問題を解くために適当な手段を選ぶ）、解釈（interpretation これらの結果を正確さと合理性の２点から点検するために、記号システムを使う推論によって推測を引き出す）として、本稿とほぼ同じように捉えている。筆者は、後２者については、意味がより広く、また、きちんとなるように考え、上記の語を採用したのである。その論文では、上のような図式は与えていない。

さて、上の図式は、方程式を利用した問題解決の次の図式をやや一般化したものといえる。

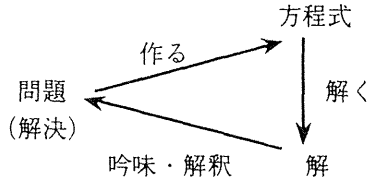

図2　文字式利用の図式

また、数学的モデル化過程を、90°回転し、文字式の利用に表現し直したものということもできる。

したがって、特に新しい着想というわけではない。しかし、上の図式の見方で、文字式の利用による証明や推論も含めて、文字式利用の全般を見直すとき、利用することの意味や、その際にどのような論点があるかが一層明かになると考えられる。そのような例を次に示す。

例1 式の利用による証明

$$(2^2+1)(3^2+1)=5\cdot 10=50=7^2+1$$
$$(3^2+1)(4^2+1)=10\cdot 17=170=13^2+1$$

から、命題「連続する２つの整数について、それぞれの平方に１を足したものの積は、また、整数の平方に１を足した数になる。」が成り立つと予想される。それは、連続する整数をn、$n+1$とすると、次のように表される。

$$(n^2+1)((n+1)^2+1)=A^2+1$$

（Aはある適当な整数）

これは、左辺を変形して次のように証明される。

$$(n^2+1)((n+1)^2+1)$$
$$=n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2+1$$
$$=n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1+1$$

$= (n(n+1)+1)^2 + 1$

つまり、$A = n(n+1)+1$ とすればよいのである。

この例で、初めの式は、命題を「表し」たのであり、次は、これを「変形」したのであり、最後は、確かに整数の平方と１の和であることを「読」んだのである。

例2　１次関数の特性

y が x の１次関数であるとき、次のように表される。

$y = ax + b$　（a、b は定数　$a = 0$）

いま、x, y の対応する値の１組を x_0, y_0 とすると、$y_0 = ax_0 + b$

よって、$y - y_0 = a(x - x_0)$

したがって、$X = x - x_0$、$Y = y - y_0$

とおけば、

$Y = aX$

と表され、Y は X に比例する関係といえる。

例3 ２次関数の特性ー２次関数の標準形化ー

y が x の２次関数であるとき、次のように表される。

$y = ax^2 + bx + c$　（a、b、c は定数　$a = 0$）

右辺は、よく知られているように、標準形に変形される。

$y = a(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$

したがって、$X = x + b/2ax$、

$Y = y + (b^2 - 4ac)/4a$

とおけば、$Y = aX^2$

と表され、x の値の変化に伴う y の値の変化は、点（$-b/2a$、$-(b^2 - 4ac)$　$/4a$）を原点と見たときの $y = ax^2$ の変化と同じであると言える。

これらの例でも、図式の「表す」、「変形」、「読む」の３つの過程を経ており、それによって、関数の特性が明かになったといえる。

初めの図式（図１）は、下のような点に留意することを怠らないとき、文字式の使用の一般的なありようを示すものとして有効であると思われる。それによって、いろいろな考察ないし研究の位置付けがはっきりするとともに、現在なされている指導の反省の視点を与えると考えられるからである。

・例１のように、証明を意図するときの使用では、「一般性」が前提になる。したがって、文字は、一般化した数を表現しなくてはならない。これに対して、方程式では、文字ー通例 x、yーは、未知の定数、つまり、ある決まっているが、まだ知られていない数を表している。だから、同じ文字といっても、その取扱い方には、大きな違いがあってしかるべきである。これは、例２の関数の式表現の取扱いについても言えることである。特に、変数 x、y、定数 a、b、cの違いに十分注意を払はなくてはならない。現在、余りに早く、一般性を目指していることはないであろうか。

さらに、次の２点を注意しておく。

（注意1）初等幾何で、仮定や結論を文字を使った式で表すことができることがある。しかし、多くの場合、正当化の過程（証明）で、その式自身は何ら推論を進める機能をもっていない。例えば、命題「二等辺三角形の両底角は等しい。」は、「$\triangle ABC$ で $AB = AC$ ならば $\angle B = \angle C$」を証明することになるが、この等式自身は変形されることはなく、したがって、推論には全く機能していない。こうした場合の式は、われわれのここで取り上げる文字式の中には含めないのである。

（注意2）代数の指導、特に、高校のそれでは、上記図式（図１）「変形」の部分だけを、例えば、式の計算、あるいは、等式の証明という名前で、取り扱っているようである。それは、文字式の利用の部分練習として意義があろうが、生徒には、文字式の利用の全体の中での意義が理解されない恐れがあるのではなかろうか。

なお、ここで取り上げる式は、文字が数量を表し、式は代数的な式（文字や数についての演算として、四則計算と累乗根を有限回行って得られるような式）に限ることにする。つまり、文字が、行列や操作等、数量以外のものを表したり、代数的な演算以外の対数を含む演算、三角関数は含めないことにする。それは、本稿が入門期（中学校数学）を主たる対象にしていること、適当な修正でそれらを含めるようにできるが、そのための煩雑さにより、見通しが悪くなることを恐れることのためである。

ここで、図式の３つの過程について概観しよう。

(１)「表す」と「読む」

「表す」と「読む」は、事象、つまり、問題あるいはパターンないし、それを日常言語で書いたものといった「表されるもの」と、文字式という記号、つまり、「表すもの」との対応に関わっている。したがって、言語学でいう意味論に当たると言うことができる。

「表す」は、事象から記号の方向へ向かうことで、一般化、抽象化の過程であると言える。これに対して、「読む」は、逆に、記号から事象の方向へ向かうことで、特殊化（particularization）、具体化の過程であるといえる。

文字式における「読む」過程で、最も著しいのは式の値である。

例4 *(a)* $x=3$ *のときの* $20-6x$ *の値は、*

$$20-6\cdot 3=2$$

(b) $a=1,\ b=-3,\ c=-10$ *のとき、*

$$ax^2+bx+c \text{ は、} x^2-3x-10$$

（注意）方程式の係数のような既知数を文字で表すことにより、方程式を一般的に取り扱うことをを最初に行ったのは、Franciscus Vieta (1540-1630)である（中村幸四郎,1962）。

(2)「変形」

「変形」は、ある文字式を別の形に変えることである。したがって、変形によって、文字式は、それを記号の並びと見たとき、初めとは異なった記号の並びとなる。したがって、変形は、言語学でいう統語論に当たると言うことができる。そこで、変形の仕方が問題になるわけである。変形の仕方は、変形規則、つまり、許される変形の仕方を規則化したものに従ってなされる。これについて、次の点に注意しておく。

・変形においては、不変のものが必ずある。そうでなくては、形を変えることが無意味になるからである。それは明言されないことが多い。変形規則は、それを裏に含みながら述べられる。

・変形は、文字記号の意味する「もの」にとらわれずに、形式的に行うことができる。

以上の「表す」、「読む」、「変形」については、中学校指導書　数学編（文部省,1989）pp.27-28で、ごく簡潔に述べられている。

(3)式の分類（その１）

式は、形から２種類に分けられる。フレーズ型の式とセンテンス型の式である。

フレーズ型の式は、対象を表す記号（例えば、数や文字 x、y）と演算を表す記号（例えば、＋や、$\sqrt{\ }$、また、（　）　もここに含める。）だけを含む式であり、センテンス型の式は、フレーズ型の式を関係を表す記号（例えば、等号＝や不等号 ＞）で結んだ式である。意味の上からいえば、前者は数量を、後者は数量の関係を、それぞれ表す。英語では、Algebraic expressions と equation & inequality あるいは、formulas ということになる。

2　表すー事象に含まれる数量や関係から式へ

表す過程は、フレーズ型の式に表すことと、センテンス型の式に表すこととでかなり違いがある。後者は、前者の基礎の上になされるので、まず、前者から始める。

(1)フレーズ型の式に表す

ここでは、数量を文字式に表すことが問題になる。そこで、数量の側から考えていく。そのとき、次の２つが原則になる。

ア 異なる数量は、異なる文字で表す。

イ ある数量が、他の数量（既に文字で表示されている）によって決まる量であるときは、それはその決まり方に従って表われる。

このイには、次のように、いろいろな場合が考えられる。

a　四則計算の意味による

例5　*同種の量だけが足したり引いたりできる。ある量より３単位大きい量、合併した量、残った量、２つの量の差等は、加法、減法で与えられる。*

ある量の３倍の量、等分した量、ある量が他の量の何倍であるかを表す数等は、乗法、除法で与えられる。

(注意) 昔は、x^2+bx *のように同次元の制約があった。それを乗り越えたのは、René Decartes (1596-1650) である。(中村幸四郎,1962,p.144)*

b　数量間の公式（言葉を使った式）の利用

例6　*単価と数量と金額の関係、被除数、除数と商、余りの関係、基準量と割合と割合に相当する量の関係、速さと時間と距離の関係、面積公式*

c　整数の順序や分類

例7　*ある整数の次の整数、連続する3整数、偶数・奇数、整数を3で割ったときの余りによって分類するときの各類に属する数*

d　数値の間の関係の一般化

例8　*2けたの整数を、各桁の数を使って表す。*

ウ どの数量を、どのような文字で表すか、それを使って、他の数量を表すかが重要なポイントである。

例9　*連続3整数を、n、n + 1、n + 2 と表すか、あるいは、n - 1、n、n + 1　と表すかは、状況による。*

(2)指導上の問題点

ここでは、次の2点を指摘しておく。

ア 算術的な見方への固執

数を使った式、例えば、3 + 5 = 8 は、3 に5を加える過程あるいは活動が、5と言う所産あるいは結果を生んだと見られることがある。この算術的な見方に固執するとき、文字式 a + b が過程と所産の両方を表すことに強い抵抗を感ずる。実際は、算術においても、3 + 5 が過程と所産の両方を表していることは、式の表し方を学習する際に教えられるのであるけれども。そして、いわゆるlack of closure（式が閉じていないままになっていること、LOC）の不安から、a + b = c のように、無理やりに閉じた形にしようとする傾向がある（Booth 1989）。

イ 数量の間の関係の中で、特に、分数を含んだとき、割合や比（例　パーセント）を含んだとき、及び、速さ、濃度の問題が難しい。

これについては、大阪府高校数学研究会の長年にわたる研究、文部省達成度調査(中学校数学)(1982)や国立教育研究所基礎礎学力研究(中学校数学)(1990)の結果から注目すべき知見が得られている。

(3)文字式の規約

文字式に表すについては、当然なことながら、表し方の約束事に従わなくてはならない。それが、式構成の規則であり、文字式表現の規約である。後者は明示されるが、前者が明示されることは殆どない。それは、数の式の場合と同様（文字式表現の規約を除いて）だからであろう。

ア 式構成の規則に従う。

次に挙げるのは、規則の例である。

・対象記号１つでもよい。

・対象記号１つに１項演算記号が許される。対象記号が２つあるときは、その間に１つだけの２項演算記号が許される。

以上の３つは、式である。

・１つの式は、１つの対象記号とみなされ、それらに対して上記のように、演算記号が許される。その際は、式は（　）をつけて示される。

・２項演算記号で始まったり終わったりすることはない。

・１項演算記号の累乗指数で始まること、累乗根記号で終わることはない。

・加法・減法より乗法・除法が先行する。

イ 文字式表現の規約

主として、乗法、累乗、除法について、記号を省略したり、分数記法を使ったりするもので、よく知られている通りである。ここでは、省略する。

(4)式の中の文字の意味

文字式で使われる文字の意味ついては、通常、次の３つがあげられる。

ア 未知の数量ー問題等での未知の数量（その値は決まっている）

これは、初め方程式、次いで、不等式において使用される。しかしながら、今日の方程式・不等式における文字の意味については別に詳しく論ずる必要があろう。本稿では省略する。

イ 既知の数量ーー般化を意図してー一般の定数、一般化された数、値

これは、数を一般的に表し（例えば、計算法則の表現に）たり、いろいろな公式における量を表したり、さらに、方程式における既知数、関数関係を表すときの変数に対する定数、あるいは、式における係数を表したりする。また、

一定の数（例えば、円周率、e）を表したりする。したがって、この使用は、非常に広い範囲にわたるということができる。これを、より詳しく分けるのがよいかどうかは、次に示す意図も考慮に入れて、検討に値するであろう。

この文字は、初め公式や法則の表現のために、後に、証明を意図し、さらに、方程式や関数において一般化を目指して使われる。

ウ 関数関係の表現における変数－関数の数表における標識の一般化として

この導入は、比例の表現 $y = ax$ における x、y から始まるのが通例である。そして、関数の形は、1次関数、2次関数等に発展し、また、変域も広くなるが、変数そのもの認識に変わりはない。したがって、比例の表現は、生徒の変数の認識において、鍵であるといえる。

普通、以上の3つを、簡略化して、次のようにまとめることが多い。

・未知数　・定数　・変数

エ CSMS(D.Kuchemann)研究に見る生徒の文字の捉え方

CSMS（Hart 1980）代数では、生徒が文字式の文字に与える意味について、上記の未知数、定数（一般化された数）、変数より以前の段階として、

・数値化された文字
・使われない文字
・対象（もの）としての文字

の3つがあることを指摘し、綿密な分析を行っている。これが、英国民という言語、文化に強く影響されたものか否かは、今後に待たなくてはならない。

(5) 式の形（演算との関わり）

ア 定数と変数、文字と係数

文字式において、ある文字に注目し、その文字だけを変数とみなし、その他の文字を数とみなすことがある。このとき、数とみなされる文字を定数という。この場合、文字と定数の積の形の式で、定数は文字の係数と呼ばれる。

イ 式の分類（その2）

フレーズ型の式に含まれる演算が乗法だけであるとき、この式を単項式という。式に含まれる演算が加法、減法、乗法であるとき、この式を整式という。整式は、単項式の和とみなされる。この意味で、多項式ともいう。このとき、各単項式を整式の項という。整式の商の形の式を分数式といい、整式と分数式をまとめて有理式という。整式の累乗根の形の式を無理式という。

この場合、数とみなされた文字に関する演算は文字式の演算とみなさない。

(6)センテンス型の式の表し方

この場合は、関係の表し方が問題になる。関係としては、相等関係と大小関係がある。前者は等式で、後者は不等式で、それぞれ表される。

ア 相等関係の分析

相等関係は、対称的、推移的である。これらは意識されないで使われたることが多いが、後述の大小関係と対比すると明かになる。

相等関係については、加法と和のように、加減乗除の四則計算とその結果の相等、単価・数量・値段や速さ・時間・距離のような、数量の間の公式の適用の他に、典型的な場合がいろいろある。その例として次がある。

・ある数量の大きさ A が変化して B になる

例10　*a円もっていたが、x円の本を買ったら、残りがはじめの半分になった。*

$$a - x = 1/2 \cdot a$$

・ある数量 C が存在し、それに等しいような2つの数量 AとB は等しい。これは、ある1つの数量が2通りに見られることに対応する。

例11　*何人かの子どもがいる。鉛筆を1人5本ずつ分けると3本余るが、7本ずつにすると5本足りないという。子どもは何人いるか。*

子どもを x 人とすると、鉛筆が y 本あるとして、 $y = 5x + 3,\ y = 7x - 5$ *これから、* $5x + 3 = 7x - 5$

例12　*家から学校まで a km ある。母が家から学校へ毎時 $v_1$km で、こどもが学校から家へ毎時 $v_2$km で、同時に出発して歩き、x 時間後に出会ったとする。出会うまでに2人が歩いた距離の和は家と学校の距離に等しい。これから、*

$$v_1x + v_2x = a$$

イ 大小関係の分析

先ず、次の２点は、相等関係と対比しながら注意しておかなくてはならない。

・反対称性　「aはbより大きい」は「bはaより小さい」と同じこと

・推移性　aはbより大きく、bはcより大きいとき、aはcより大きい

大小関係の分析では、先ず、数量の大小がいろいろな表し方で示されることを理解しておく必要がある。例えば、・*余る、足りない*　・*越える、越えない*　は、大小の言葉は使っていないが、いずれも、数量の大小関係を表している。また、・*買える*　・*買えない*　もそのような例である。

例13　*a 円もっていたが、x 円の本とy 円の本を両方買うことができなかった。*

$$a < x + y$$

この例で注意されるように、大小関係においては、さらに、・*以上と大きい*　・*以下と未満*の区別をはっきりすることが必要である。つまり、境界値が含まれるかどうかをはっきりさせることである。実際、x が a 以上は、$x \geqq a$ と書かれ、$x = a$ も含まれる。上の例13で、買えるときは、$a \leqq x + y$ と表される。

さらに、「aより大きくbより小さいような値の範囲」という考えも大切である。

不等式では、文字の取る値は、すべて実数である。したがって、２つの数a、bについて、

$$a < b、a = b、a > b$$

の中の１つだけが成り立つ。

ウ 方程式と（解く）不等式

等式や不等式で、それらにあてはまる文字の値を求めることを考える場合がある。それが、方程式、（解く）不等式である。

ある文字、例えば、xを含む等式があるとき、その等式にあてはまるように、xの値を決めることを考える場合がある。その時、この等式がxについての方程式であり、当てはまる値が方程式の解である。方程式の解は有限個であるのが普通である。

いくつかの文字を含む等式があるとき、１つの文字を決め、他を定数とみて、等式をその文字についての方程式と見ることができる。

ある文字、例えば、xを含む不等式があるとき、その不等式にあてはまるように、xの値を決めることを考える場合がある。そのとき、この不等式がxについての（解く）不等式であり、当てはまる値が不等式の解である。不等式の解は、aより大きい数のすべてのように、ある範囲の数全体であるのが普通である。それは、数直線上に表すことが多い。

これらについては、一層詳しい説明が必要であるが、本稿では省略する。

エ 方程式・不等式の立式における解析的思考

方程式、不等式では、問題の条件を分析し、それを等式あるいは不等式に適切に表現しなくてはならない。適切というのは、問題に含まれる条件とできるだけ同値な形でということであるが、その作業は容易なことではない。ここで、そうしたことのための１つの工夫を挙げておく。それは、解析的といわれる思考法であって、次の仕方である。

・求めるものが得られたとして、その条件を分析し、それを式に表す。

これは、初等幾何の作図題における解析に類似したものといえる。例えば、いわゆる、事前の問題（「…にしたい。」という問題）を事後化して（つまり、「となった。」として）、その場合について相等や、大小の関係を調べ、条件を分析していくものである。

なお、こうした点に関連して、Decartesの幾何学に見られる解析的思考が参考になると考えられる（中村,1962）。

オ　ﾌﾚｰｽﾞ型の式とｾﾝﾃﾝｽ型の式の関わり

数量間の公式を変形して利用していることを注意しなくてはならない。

例14　*$s = vt$ を変形した $v = s/t$ によって、速さvを距離s、時間tで表して、フレーズ型の式を作るのに使う。*

3　式を読む－式から事象に含まれる数量や関係へ

式を読むことは、１(1)で触れたように、文

字式から事象に含まれる数量や数量関係に具体化し、式の意味するものを考察することである。ここでは、先ず、どのようにして具体化をはかるかという式を読む仕方について検討し、次に、読むことの内容を分析して、例を挙げながら示すことにする。

(1)式を読む仕方

これには、大きく分けて、数量や数量関係を表す言葉と結び付けて捉える、数値的に捉える、図形的に捉える、式の形という記号的に捉えるの4つが考えられる。それらを簡単な例とともに示そう。

ア 式を演算された数量と結びつける

これは、文字式をその表した事象に結びつけるもので、読むことの最も素朴なものといえる。

例15 *求積公式を、どのような数量をどのような演算によって得ているかを明らかにして、その内容を捉える。*

例16 *公式の意味付けとして、*

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ *で、*

右辺の x の係数は右辺の2数の和、定数項は2数の積である。

イ 式を数値と結び付ける

これには、式に数値を代入して式の値を求めることが典型的であり、式の具体化としては、最も基本的なものである。さらに、1(1)で触れたように、一般的な2次式 $ax^2 + bx + c$ から特定の $x^2 - 3x + 10$ に具体化するのも、これに含まれる。

ウ 式と図形と結び付ける

これは、文字式といういわば目に見えないものを図形という目に見えるものと結び付け、視覚に訴えるものである。したがって、抽象的であるものが具体的になり、非常に捉えやすくなると考えられる。もちろん、そのための代償は払わなくてはならないけれども、それを越えて、理解が深まることを考慮すれば、指導において有用であるといえる。

例17 *計算の法則* $a - (b - c) = a - b + c$ *は、次の線分図で示される。*

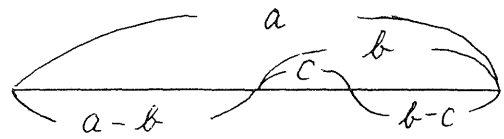

図3 計算の法則の線分図

例18 *因数分解の公式* $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

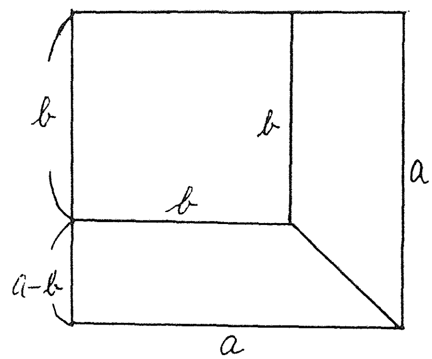

図4 2乗の差の因数分解の図

は、2つの正方形の面積の差が、台形の面積の2つ分で表わされることによって、上の図のように示される。

これらの例では、式中の文字や文字式がすべて正数を表すという制約を受けていることは注意しておかなくてはならない。

エ 式の形に着目して式を捉える

これは、式の具体化を越えて、それよりむしろ、いろいろな式を統一的にみたり、式をより一般化したりしようとするときによく利用されるものである。

例19 $(2^2 + 1)(3^2 + 1) = 7^2 + 1$

等から

$(n^2 + 1)((n + 1)^2 + 1) = (n(n + 1) + 1)^2 + 1$

を予想することができる。（例1参照）

例20 *数列* $\{x_n\}$ *において、隣接項間に、*

$x_{n+1} = ax_n + b$ *(a、b は n に関しない定数)*

のような1次の関係が成り立つとする。

もし、 $x = ax + b$ *となる x の値 p が存在すれば、*

$$x_{n+1} - p = a(x_n - p)$$

となる（例2参照）。これから、数列 $\{x_n - p\}$ *は等比数列であるといえる。*

(2)式を読むこと

(1)で述べた調べたような仕方によって、式を読むことになるが、その内容を例とともに述べる。

ア 数量や数量関係を構造的に捉える。

これは、得られた式から、そこに見られる数量や数量関係を構造として捉え、新しい発見ないし洞察を得ることである。

例21　*2次方程式の解の公式から、解が、方程式の係数にどのように依存しているかの関係を捉える。さらに、解が一致することがあるか、解が実数であるかどうかといった条件を明かにする。*

例22　*2次関数の標準形化によって、関数値の振舞い、つまり、最小あるいは最大が存在すること、そのときのxやyの値、変化における対称性等の変化のようすを明かにする。*

イ 得られた数量や関係について検討し、問題に即して吟味したり、解釈したりする。

これは、方程式を利用して問題を解決するときに典型的にみられるものである。実際、問題が与えられたとき、それから作られた方程式は、問題の条件を、すべて十全に表しているとは限らない。したがって、方程式を解いて得られた解がそのまま、問題に適当であるとはいえないからである。そこに、吟味や解釈の必要がある理由がある。だから、原則的にいえば、このことは、式を利用した問題解決には、いつも不可欠といえるのである。もちろん、そうした吟味や解釈の取扱いを、生徒の発達段階を配慮し、遅らせることが教育的であると考えられることもあろう。

例23　*「弟が2km離れた駅に向かって家を出てから10分立って、兄が同じ道を自転車で追いかけた。弟の歩く速さ、兄の自転車の速さを、毎分それぞれ、80m、240mであるとすると、兄は出発後何分で弟に追いつくか。」という問題で、x分後に兄が追いつくとして、方程式をつくると、*

$$240x = 80(10 + x)$$

これを解いて、　$x = 5$

これから、兄は家から1.2kmの地点で弟に追いつくことが分かり、$x = 5$　は問題にあてはまっている。（福森、1992）

ウ　内容をつかんで、得られたことの一般化や特殊化をはかる。

これは、変形によって得られたことがらの内容を的確に把握することによって、それを一般化したり、あるいは、特殊化したりすることをいっている。この場合、内容というのは、ことがらそのもの、つまり、命題自身のこともあれば、それを得るのに使われた式変形の過程からつかまえられるものであることもある。

例24　*命題「連続3整数の和が3の倍数である」は、その中央の数をnで表すとき、3整数が、$n-1$、n、$n+1$となるので、*

$$(n - 1) + n + (n+1) = 3(n + 1)$$

から、その真であることがいえる。この表現と変形から、上の式の1をkとしても成り立つことが分かり、「kずつ違う3整数の和が3の倍数である」と一般化できることになる。

例25　*数a、b、c、dについて、等式*

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad + bc)^2$$

が成り立つことは、左辺と右辺を展開すればただちに分かる。これから、「2つの整数の平方の和で表される2数の積は、また、2つの整数の平方の和で表される。」ことがいえる。ここで、$a = n$、$c = n + 1$、$b = d = 1$とおけば、$bd = 1, ad - bc = -1$で、例1で示した等式が得られる。同じようにして、$a = n$、$c = n + 1$、$b = d = \sqrt{k}$　とおけば、次の結果が得られる。

$$(n^2 + k)((n + 1)^2 + k) = (n(n+1) + k)^2 + k$$

また、初めの等式の和を差に変えた次の等式も成り立つ。

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad - bc)^2$$

エ 式の形に着目して、一般化したり、統合したりする。

これは、式の形に注目するもので、いくつかの式のそれが同じであるとき、それらは何らかの共通の属性をもつわけで、それらを一般的に取り扱ったり、又、統合したりすることができ

ることになる。

例26　*$P = ab$（値段＝単価x数量）、$s = vt$（距離＝速さx時間）、$S = ab$（長方形の面積＝縦x横）は、どれも、$z = xy$ の形である。これは、z が x、yの積に比例する関係（比例定数 1）とみられる。このとき、z が一定ならx、yは反比例、y が一定なら x、zは比例、x が一定なら y、zは比例の関係である。*

オ 式に表した人の思考過程を探る。

これは、数量や数量関係を表した表した式から、その表し方をした生徒一人一人の思考過程を探ることができる。作られた式は、一人一人の思考過程を反映していることは当然であって、生徒が自身の思考過程を詳しく述べることが困難であるときも、その概略は捉えることができる。多くの場合、教師が経験していることである。

例27　*右の図のように、おはじきを縦a個、横b個の長方形の形に並べるときのおはじきの総数*

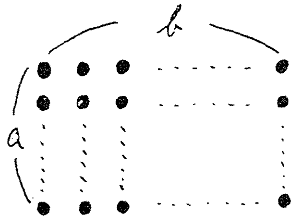

図5　おはじきの総数

・$2(a + b) - 4$、・$2a + 2(b - 2)$、

・$2(a - 1) + 2(b - 1)$、・$ab - (a - 2)(b - 2)$

と表したとき、それぞれの思考過程

（注意）小学校指導書　算数編(文部省,1989)

には、式のよみ方としてつぎのようなことが考えられるとしている。(p.58)

(ア)式からそれに対する具体的な場面をよむ

(イ)式の表す事柄や関係を一般化してよむ

(ウ)式にあてはまる数の範囲を拡張して発展的によむ

(エ)式から思考過程をよむ

(オ)数直線などモデルと対応してよむ

これらは、本節の考察に参考となる。

4　式の変形ー式の形式的処理

式の変形は、文字や式が意味する具体的内容を考えることなく、初めの式を別の形の式に変えることを意味する。これは、形式的変形といわれる。先ず、変形について、次の２点を注意する。

ア 変形するとき、「不変」なものが必ずある。

変形が許されるのは、その変形において何か不変するものが存在するからであるのは明かである。そうしたものが全くないのであれば、変形することは無意味だからである。実際、フレーズ型の式の変形では、その表す数量が不変であり、センテンス型の式の変形では、その表す関係が不変である。そして、この変形では、方程式や不等式の解は不変である。

式の変形は、変形規則に従ってなされるが、この変形規則は、こうした不変性を背後にもっているということができる。

イ 目的に応じた変形が基本である。

これは、式を変形する人の「・・・をしたい」という意思が決定的であることをいっている。式に表すことも、こうした意思なしにはなされないのであるが、変形では、より明確になる。変形規則に従いさえすれば、どのように変形することも許されるのであるから、目的意識が明確でない限り、進めようがないのである。文字式を利用する証明等で生徒が行き詰まる理由の1つは、このためであると考えられる。そこで、何をしたいのか、そのために何を示せばよいかを、式の変形という過程の前に、はっきりさせることが大切であり、また、必要な場合が多い。そして、このためには、「式を読む」こととの関連付けをはかることによって、そうした経験をもつことが必要であると考えられる。

(1)フレーズ型の式の変形

これは、普通、式の計算と呼ばれるもので、下に示すアの変形規則に従ってなされる。実際の操作は、イとウで示されるものである。よく知られているので、項目だけを挙げ、詳細は述べない。

ア　式の計算法則ー数の計算法則の類比

・$a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$

・$ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$

・$a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$

・$a + 0 = 0 + a = a$, $1a = a1 = a$, $0a = a0 = 0$

・$a + (-a) = 0$, $a + (-b) = a - b$

・$a\ 1/a = 1$, $a/b = a\ 1/b$

イ 式を簡単にする

・同類項の簡約・・式で文字の部分が同じ項は、まとめることができる。

・式の整理

ある文字について整理する、降べきの順に、昇べきの順に

対称性に着目する。（対称式の場合）

ウ 式の計算

・整式の加法と減法

$a + (b + c) = a + b + c$、$a - (b + c) = a - b - c$、$a - (b - c) =$

$a - b + c$ によって（　）をはずし、結果を簡単にする。

・整式の定数倍

・整式の積の形を和の形にする（展開）－（　）をはずす

・整式の和の形を積の形にする（因数分解）－（　）でくくる

上のイで述べたように、どんな場合に和の形にするか、また、どんな場合に積の形にするかの判断が大切である。

・整式の範囲内での除法、$A = BQ + R$（余りRは、割る式Bより低次）

・分数式の加法と減法、通分と約分、部分分数展開（1文字の式で）

・分数式の乗法と除法

エ 式の計算における生徒の誤り

これについては、M.Matz: *Towards a process modelforhigh school algebraerrors* が著名である。そこでは、「学んだ知識と初めて出会う問題のギャップを埋める外挿法の技法に誤りがある。」と述べられている。そして、次のものが挙げられている。

・線形性　$\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$

$(A + B)^2 = A^2 + B^2$、

$A/(B + C) = A/B + A/C$

$1/3 = 1/x + 1/7$ から $3 = x + 7$

・一般化 $A + \{A$ の逆元$\} = 0$ から $A \times 1/A = O$

・表記法 $x = 6$ のとき $4x = 46$　とする

・同等性 $5/(2 - x) + 5/(2 + x) = 4$ から

$5(2 + x) + 5(2 - x) = 4$

また、その他の事例として、次のものも知られている。

・$3x + 4x = 12x$、$7x^2$、　$7x - 7 = x$、

$4x - x = 4$、$3(a - b) = 3a - b$

・$(3x + 1)^2 = 9x^2 + 2x + 1$、

$(2x^2 + 3x + 1)/(x^2 + x) = 6/2 = 3$

(2)センテンス型の式の変形

ここでは、等式の性質、不等式の性質といわれるものが、変形規則となっている。等式においては、方程式の変形、不等式においては、解く不等式の変形が、特に大切である。

A　等式

ア 等式の性質

・$A = B$ ならば $B = A$　　（対称性）

$A = B$, $B = C$ ならば $A = C$　（推移性）

・$A = B$ ならば　$A + C = B + C$

$A = B$ ならば　$A - C = B - C$

$A = B$ ならば　$AC = BC$

$A = B$ ならば　$A / C = B / C\ (C \neq 0)$

・等式では移項が許される。

イ 進んだ等式の性質

・$A = B$, $C = D$ ならば　$A + C = B + D$,

$A - C = B - D$

・$A = B$ ならば　$A^2 = B^2$

・さらに、一般化して、次の代入原理にまとめることができる。

・$A = B$ ならば $f(A) = f(B)$

（$f(x)$ は x についてのフレーズ型の式）

上記アの等式の性質は、これに含まれる。

ウ　方程式の解き方

・xについての方程式 $A(x) = B(x)$ があるとき、それを等式の性質によって変　形したものを、$C(x) = D(x)$とする。さらに、$C(x) = D(x)$が、再び、等式の性質によって、$A(x) = B(x)$に変形できるとする。このとき、方程式 $A(x)=B(x)$ と方程式$C(x) = D(x)$は、同値であるという。このとき、両方程式の解は一致する。

・方程式の解は、$x=a$ の形で表すことができる。その形を目標に（同値）変形していけばよい。

エ 恒等式

変形されたフレーズ型の式同士を＝で結んだものが、恒等式である。

・恒等式では、対応する係数はすべて等しく、また、任意の値に対して、両辺が意味をもつ限り等しい値をとる。

B　不等式

ア 不等式の性質

・$A > B$ ならば $B < A$　　　（反対称性）
　$A > B, B > C$ ならば $A > C$　（推移性）

・$A > B$ ならば　$A + C > B + C$
　$A > B$ ならば　$A - C > B - C$
　$A > B, C > 0$ ならば　$AC > BC$, $A/C > B/C$
　$A > B, C < 0$ ならば　$AC < BC$, $A/C < B/C$

・不等式では移項が許される。

・$a^2 \geqq 0$ 特に、$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

イ　解く不等式

・不等式 $A(x) > B(x)$ を不等式の性質によって変形したものを $C(x) > D(x)$ とする。さらに、$C(x) > D(x)$ が、再び、不等式の性質によって、$A(x) > B(x)$ に変形できるとする。このとき、不等式 $A(x) > B(x)$ と不等式 $C(x) > D(x)$ は、同値であるという。このとき、両不等式の解　　は一致する。

・不等式の解は、

$x < a$、あるいは、$x > a$

のように表されることが多い。不等式を解くには、上の形を目標に（同値）変形していけばよい。

5 まとめ－指導への示唆と今後の課題

本稿では、初めに第1節で文字式の使用の図式を与え、次に、そこに示された3つの過程のそれぞれについて第2-4節で簡単ながら解説を行った。そこには実際指導に関わる点が多く含まれている。ここでは、先ず、概括的に、使用の図式の意義と指導のための方策について述べ、指導への示唆としたい。それは、同時に、今後の課題の主たるものとなることであろう。さらに、本稿に含まれなかったことで、重要な点を指摘しておくことにする。

(1)文字式使用の図式の意義と指導への示唆

文字式の重要性が多くの人に理解されていることは確かといえるだろうが、何故かについては必ずしも十分とはいえないように思う。それは、文字式の使用がどのような意義をもっているか、また、使用がどのような過程を経て何を達成しているかを、具体例とともに説得力をもって示していないからではないだろうか。数学で、文字式は、余りにも到るところおいて使われていて、余りにも有力であるので、あらためて、その使用を反省することはむしろ困難というべきかもしれない。

一方、教室での数学の指導においては、遍在的であり有力である文字式を指導するのは当然な内容とし、文字式の使用の際にどうしても必要な式の計算（変形の重要な部分）に格別の力を注いできたのではあるまいか。式の計算は、中学校に始めて導入されるものであり、しかも、伝統的に中等数学の主要部分であるとみられてきたこと、さらに、練習によって比較的容易にその成績を高めることができるものであること等から、現在でも非常に重視されているように思われる。実際、中学校数学教科書ではそれを1つの章としいるし、高校でも以前はそうであった。こうして、文字式の勉強の主要部分は式の計算であるという信念を生徒が抱くとしても不思議でないような状況に導いているのではなかろうか。もちろん、式の計算は、変形という過程の主要部分であり、文字式の使用において不可欠なものであることは確かであり、その技能の習熟は必須であることに異論のあるはずはない。問題は、それが思考を進める手段としての文字式の使用において果たす役割である。あくまで、計算は使用の全体の過程の一部分であって、使用をより効果あるものにするものである。使用という目的に奉仕する一部分というべきであって、決して、全体ではないのである。

また、数量や数量関係を文字式に表すことは、入門期において、ある程度組織的に取り扱われ

るが、以後は、問題に即したその場その場の取扱いに委ねられているように思われる。また、式を読むことは、指導における技巧と見られているというと言い過ぎかもしれない。

さらに、わが国に生徒に見られる「文字式の使用に気が進まない傾向」、つまり、文字式を使えば処理が的確にでき正確に内容が伝えられるのに、また、そうした能力をもっているのに、進んでそうすることはなく、むしろそれを避けようとする心的傾向を、忘れてはならないと思う。上記のように、多くの時間とエネルギーをかけていながら、こうした状況がみられるのは、やはり、指導のあり方に問題を含むことを意味するのではないだろうか。また、同じ問題でも、数値では求められても文字式では正答できない生徒が多いという指摘も、上と同根といったら過言であろうか。

こうした状況においては、文字式の使用についての全体的見通しを与えるような図式（図１）を用意することは大きな意義があると思われる。先ず、それは、文字式の使用が、どのような過程を経て、何を達成しようとしているかを明らかにする。これは、図式自身が明言していることである。次に、それぞれの過程の位置とその内容を明かにする上で、式の計算の現在の指導における位置付けを見たが、それがどのように修正されるべきか、また、表すや読むの位置付けがどのようであるべきか、また、それが何を内容として含むべきかを明かにする。これらは、やや詳細に本稿に述べた。もちろん、包括的でなく、すべてを尽くしていないことはいうまでもないけれども、どのように進めるかについてのある程度の理解は得られるであろう。こうして、文字式の指導のあるべき姿についての展望が得られるのではなかろうか。

この図式は、さらに、具体的に、指導の進め方にも利用できると考えられる。それぞれの学年で、その生徒の「表す、変形、読む」についての達成度に対応して、この図式に沿うような指導を試み、学年の進行とともに、取り上げる題材の内容を広め、また、深めることは、生徒の発達に応じつつ、文字式の使用を一層高いものにすることにつながるのではないだろうか。そして、このことによって、生徒の文字式についての誤まった信念を正し、上述の「文字式の使用に気が進まない傾向」を変化させるための一歩を踏み出すことができるのではなかろうか。

このことに関連して、「記号のセンス」に触れておかなくてはならない。それは、Reshaping School Mathematics (MSEB,1990)において、中等学校数学の主要目標として挙げられたものである。それは、初等学校の目標としての「数のセンス」と対応するものであると考えられる。「記号のセンス」の内容は、既に、J.Fey、A.Arcabi によって、例示されているところであるが、筆者は、内容の例示よりも、どういう点が「記号のセンス」基本となるかを考えることが大切であると考える。そして、この点についても、今回の図式を基に考察できるのではないかと思われる。実際、文字式を使用して思考を進め、事象に含まれる数量や数量関係についての新しい発見やより深い洞察が得られるようはかることが、「記号のセンス」を育成することであると考える。それは、図式に従って実践していく場合、全体過程を考慮しながら、それぞれの過程の実行を円滑に進めるための心的なガイドとなりうるものであると考えられる。いうまでもなく、各過程に必要な技能の習熟がなければ、文字式の使用は適切には行い得ないが、それにも増して、図式を１つのサイクルとして全体的に捉えることによって、文字式を使用して事象を研究することの意義を捉えることが基本であり、それを念頭において各過程を導くセンスが大切であると考えるのである。

(2)今後の課題

上で述べた指導への示唆がそのまま今後の課題であるといえるであろう。実際に、どのような題材でどのような展開を試みるか、また、そのとき、生徒はどのように応えるであろうかという、実践の問題はすべて、これから詳細かつ綿密に検討しなくてはならない。そういった意味でも、本稿は、序説なのである。

そういう実践の問題の以前にも課題は非常に多いのである。先ず、記号のセンスである。そ

れは非常に重要な概念であって、より詳しい分析がなくてはならない。文字式使用の図式と深く関連しており、実践においても鍵となるものだからである。

次に、本稿で与えた図式に従うとして、ここで取り扱わなかった代数の主要な内容についての詳しい検討である。それには次のものが含まれる。

第1に、方程式・不等式の概念についての検討が必要である。本稿では、紙数の関係もあって省略したが、それを改めて分析しなくてはならない。その際には、2(4)の式の中の文字の意味についての一層詳しい分析が肝要であると考えられる。特に、連立の場合、どのように考えたらよいか、あるいは、利用した問題解決においてはどうか等、多くが残されている。第2に、恒等式についての検討が必要である。それには、1文字の整式のもつ性質、例えば、因数定理の検討が必要である。そこでは、文字と値の区別を含めて、代数の本質的部分が姿を見せることになるのでなかろうか。第3に、文字式を使って展開される数学内容、例えば、解析幾何において、その特徴的な使い方を見るにつけても、それがどのような文字式の使用の仕方であり、本稿の図式とどのように整合し、あるいは、どのような特徴を示しているか、また、上述の文字の意味との関連はどのようであるか等が具体的に検討されなくてはならない。関数についても同じことがいえるのではないだろうか。

以上の課題は、どれをとってみても容易なものではないことは確かである。これらの課題を明らかにすることで、序説としての本稿を終わることにしたい。

(注)

(1)本稿は、平成7年12月山口大学において筆者が行った集中講義の一部を改訂したものである。

(2)本稿の作成は、多くの和文、英文の文献、数学教育研究者との討議に多くを負うている。

お名前を挙げることができないが、厚くお礼申し上げます。

そのため、引用文献はごく少なくしている。

引用文献

中村幸四郎(1962). 数学史. 啓林館

福森信夫他(1992). 数学1年. 啓林館

文部省(1989). 小学校指導書算数編 . 東洋館

文部省(1989). 中学校指導書数学編 . 大阪書籍

Booth, L.B. (1988).Children's Difficulties in Biginning Algebra.In Coxford, A.F.(Ed) *The Ideas of Algebra, K-12* 1988 Yearbook NCTM

Hart, K.M. (1981). *Children's Understadingof Mathematics: 11- 16* John Murray

Mathematical Sciences Education Board (1990). *Reshaping School Mathematics* National Academy Press

Matz, M.(1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman et al.(Eds) *Intelligent Tutoring Systems,* Academic Press