筑波数学教育研究第2号　1983.3

数学教育におけるモデル化についての一考察

教育学系　三　輪　辰　郎

はじめに

近年，数学の応用は著しく広くなり，また，応用のしかたも多様になってきている。これにともなって，応用数学という言葉は，その意味するところも変わりつつある。これは，たとえば，H. O. Pollak の指摘に見られる通りである。それによれば，[1] 応用数学は，古典的な応用数学，有意義な実際的応用をもつすべての数学という意味のほか，次の2つを定義として考えることがあるといっている。

- 数学以外の分野あるいは実生活のある場面に始まり，数学的解釈つまりモデルを作成し，そのモデル内で数学的作業を行い，そして得た結果をもとの場に適用すること。
- 人々がその暮しの中で数学を応用するときに実際にしていること。上と似ているが，通常，数学以外の世界と数学の間の輪を何回も回ることを含む。

このような数学の応用の広がりの中で，共通に見られる特徴は，Pollak の指摘したような応用過程それ自身であるということができる。そして，それは，多くの場合，数学的モデル化過程と呼ばれる。

もともと，モデルという言葉は，たとえば，絵画・写真のモデル，プラモデルのような日常的な意味を除いても，科学において，また，数学においても多義である。ここでは，数学的モデル化に焦点をしぼりながら，モデルの意味及びモデル化過程について考察し，モデル化過程の数学教育における意義及び問題点に触れることにしたい。

1. モデルの意味

科学において，モデル（model）という言葉は広く使われており，その意味も多義である。

一般的には，Tarski のいうように，「1つの理論Tのすべての妥当な命題が，そこにおいて満たされるような可能的実現は，Tのモデルといわれる」のである。[2] これと同じようなことを，R. Wilder は次のように述べている。「Σを公理系とするとき，その解釈（Interpretation）とは，Σの公理が，そこに含まれている変数のすべての値に対して真の陳述となるようなしかたで，Σの無定義用語に意味を与えることであり，解釈によって得られた概念を示すのに語モデルを使う。」[3] ここで，公理系を理論と読み直せば，上と同じになってくる。これらは，たとえば，非ユークッド幾何学とその Klein モデル，数学的構造とそのモデルといった言い方に見られるものであって，数学でよく用いられるものである。

経験科学においては，モデルというとき，対象に関する理論を指すこともあるようであるが，多くの場合，対象（事象）に関しての言葉であって，多様な意味をもって使われている。たとえば，[4]

- 未知の事象に対して，既知の他の事象の結果を利用して，こうであろうと考えてつくりあげたモデル —— 構成モデルといわれることがある。例，太陽系，分子模型。
- 既知の事象であっても，それがわかりにくいとき，わかりやすい他の事象をもってきて，はじめの事象を解明するために，つくりあげたモデル —— 類比モデルといわれる

ことがある。例，電流のモデルとしての水流。

・複雑な事象を考察するために，それから単純化・理想化することによってつくりあげたモデル ── 近似モデルといわれることがある。例，理想気体，完全流体，自由落体。

・巨大な，または，微小な事象をわかりやすくするため，実物を縮小または拡大してつくられたもの ── いわゆるスケールモデルである。例，地球儀，地図，原子モデル。

をあげることができる。これらは，すべてをつくしたものでないし，また，一つの例がいくつもの意味をもっている場合もあることは確かである。こうして，モデルについて，「もろもろの対象や関係を同一領域や他の領域における既知構造の類比関係において，模写・模倣・抽象したもの」[5]としているのは，上の例から考えてみてうなづけるところである。

このようなモデルは，その働きから見れば，未知の事象を探求したり，あるいは，それを説明したりする役割りをもっていて，事象に対する洞察ないし理解，あるいは，そこに見出される問題の解決に大きく貢献することが，上述の例から見てもわかる。

以上をふまえてみると，A. Pinker のモデルについての次のような定義[6]の意味がはっきりしてくる。

・「系Mが系Oの，ある目的に対してのモデルであるというのは，

‘Mは，その目的に対してOの代用でありうるし，また，Mの研究は，この文脈において，Oに対して意味ある結果を生み出すことができる’

が成り立っているときである。」

これまでの論議からして，これは妥当なものとして受けとってよいであろう。このようにして，もとの事象をO，モデル作成の主体をS，主体のもつ目的をP，主体の使いうる手法あるいは理論をTで表わすことにすると，事象OのモデルMは，O，S，P，Tによってきまる関数

$$M = f(O, S, P, T)$$

であるということができる。

ここまで，モデルについて見てくると，2つの方向のあることに気づく。

その1つは，はじめに取上げたもので，

A．理 論→モデル

の方向において考えられるものである。

これに対して，事象についてつくられているとみられる

B．事 象→モデル

の方向のものが，ついで考察されたものである。このように，理論からモデルへ，事象からモデルへの2つが見られることになるわけであり，モデルは，理論と事象のジョイントともいうべき地位にあるといってよいことになる。

以下，本稿で考察するのは，主として，事象とモデルとの向に関わるものであり，上でいえばBに入るものである。

2. 数学的モデル

モデルは，対象とする事象，それを取扱う目的と手法によって，それを表すのに，

ことば，図などの視覚的手段，数や式などの数学的手段

など，いろいろのしかたがある。

数学的モデルというのは，数学的手段を主な表現方法としてとっているものであり，したがって，モデルの運用においては，当然のことながら，数学的作業が伴うものである。たとえば，前にあげた近似モデルの例の自由落体について，これを

$$v\left(= \frac{ds}{dt}\right) = gt$$

として，これを表すとすれば，この等式は，落体の数学的モデルということができる。

数学的モデルについて，D. N. P. Murthy は，特徴を次のようにあげている。[7]

「ア．変数が記号により，変数間の関係が作用

素により表現されるような定式化である。

イ. 変数は外界にある物理量と連合することのできるものである。

ウ. 作用素は外界の物理的変数の間の関係に連合することのできるものである。

エ. モデルは，外界と1対1に関係づけられるべきではない。つまり，モデルは外界のすべての情報を含むとは限らない。

オ. モデルに含まれる外界の情報量は，それが使われるしかた，つまり，モデル作成者の目的に依存する。」

このうち，ア，イ，ウは，数学的表現に関わることであるが，エとオは，より一般なものである。エで述べていることは，モデルが外界の事象と1対1でないこと，たとえば，事象に対する「近さ」においていろいろのモデルが存在しうることを示している。これは，次に述べる「より良いモデルを求めて，モデルの改良をはかる」ことに対応しているであろう。また，オで述べるモデル作成者の目的に関しては，前節で触れている通りである。エとあわせ考えれば，モデルは，同一の事象についても，作成者の目的によってさまざまであることを示しているわけで，前に述べたモデルについてのM＝f（O，S，P，T）の考えに含まれていることになる。

さて，数学的モデルには，変数，関係などによって，さまざまのものがある。それは，上に述べたように，対象とする事象，取扱う目的，使おうとする数学的方法によってちがってくる。次にその例について考えてみよう。

まず，モデルは決定論的か確率論的かによって区別される。というより，事象に対して，決定論的見方をするか，確率論的見方をするかということであろう。

たとえば，D．N．Burghes 他による例で述べてみよう。[8)]

・売店である週刊誌を仕入れる問題を考える。需要は変動し，最大4部，最小0部，多くの週で，2～3部である。1部の仕入れ値が60S．売り値 £1 で，売れない部分の返却が認められないという条件で考える。

この場合，もし，最小予想収支（需要が最も少ない場合の収支を考える）を最大にするのが1つの基準である。ほかにも mini max regret（他の意志決定をしなかったことを後悔する量の最大を最小にする）など，いろいろの基準に考えることができる。

これらはすべて，需要変動の確率を考えに入れない決定論的なモデルといえる。

これに対して，需要変動が確率的であると考え，「結果がどの程度起りやすいか」を考慮に入れ，期待値を基準にすることができる。これは，確率論的なモデルということができる。

次に，変数がどんな値をとるものと考えるによるちがいがある。つまり，変数のとる値が整数のように離散的な値であるか，あるいは実数のように連続的な値であるか，さらに一般化して，複素数の値であるかということである。これは，次に述べる関係の表し方と関連のあるものであることはいうまでもない。

そこで，同じ事象であっても，変数を離散的な整数と考えた方が都合がよいときもあり，あるいは，連続的な変数を考えると良いときもあるのは，作成目的や使う数学的方法によってそうなるのである。そのような例として，生物学における個体数変動をあげることができる。[9)]

・ある生物の第 i 期はじめの個体数を $A(i)$（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots$）とし，第 i 期1期間の変動が，出生数，死亡数ともに，その期はじめの個体数 $A(i)$ に比例するものとすれば，

$$A(i+1)-A(i)=b\,A(i)-d\,A(i)$$

（b，d は，それぞれ，出生，死亡の比例定数）と表される。ここで，

$$c=1+b-d$$

とおくと，

$$A(i+1)=cA(i) \quad ①$$

これは時間 t が離散的な値 $t=0, 1, 2\cdots$ …をとるものと考え，$A(i+1)$ と $A(i)$ の関係を①の形で表したものである。

これに対して，同じ事象について，時間 t が連続的な値をとるものと考え，$A(t)$ も連続的な値をとり，関数 $A(t)$ が t について微分可能であるとすると，上の①に対応する $A(t)$ と t の間の関係は，k を定数として，

$$\frac{dA(t)}{dt}=kA(t)$$

のように微分方程式に表すことができる。

上で示した例からもわかるように，モデルにおける変数の間の関係が，解析的な微分方程式で表されるものもあれば，連立方程式などの代数方程式で表されるものある。

後者の例としては，何ケ所かの工場から何ケ所からの販売所までの輸送の問題（輸送費用を最小にするもの）がある。これは，最も簡単な場合, 線形計画法によって解かれる。

数学的モデルには，上のような数式的なものばかりではない。幾何学化し，図形的に考察することも忘れてはならない。

有名なケーヒスベルグの橋渡りの問題は，この最も古典的な例といえる。[10]

以上，数学的モデルの意味を述べ，その例を示したが，その共通の特性はもっていても，対象，目的，方法によって，非常に多様であることがわかる。次に，この数学的モデルをどのように作成していくか，その過程を見ることにしよう。

3. 数学的モデル化過程

数学的モデル化過程というとき，それは，はじめに述べた，Pollak の定義に似て，次の4段階を踏むことになる。[11]

まず，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で，

(1) その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化)。

(2) 定式化した問題を解く（数学的作業)。

(3) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し, 評価する（解釈，評価)。

(4) 問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化)。

上述の過程で，(1)では，理想化・単純化ないし近似など，一種の「結晶化」がなされるとともに，適切な仮定の設定，それらを数学的言語で表現することが必要である。この際，解けるように簡単な定式化をはかることと，事象の複雑さを捉えることとは，経済学でいうトレード・オフの関係にあるといえる。また，(3)で，結果が検討され，評価されるが，それが満足できないときは，(4)で示すようによりソフィストケートされたモデルを求めて，(1)〜(3)の過程をくり返すことになる。つまり，(4)は，(1)〜(3)とは少しちがうのである。(1)〜(3)で，過程が一応完結するのであるが，(3)で行った評価の結果を踏まえて，いっそうのモデルの改良を求めて再び(1)〜(3)をくり返すというスパイラル的発展を(4)で表したのである。

以上をまとめて図式的に示せば，次のようになる。

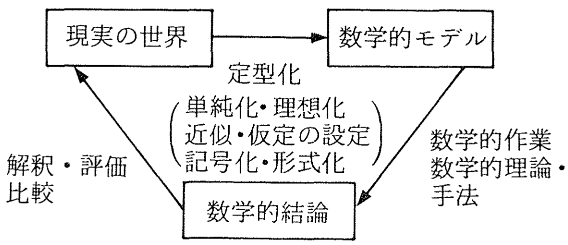


図 1

上の図式で，実際は数学的モデルの改良を求めて，何回も回ることになるのである。

これからもわかるように，数学的モデル化過程は，単に，事象に対する数学的モデルを

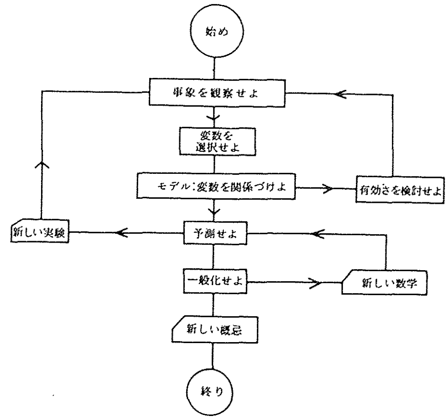
つくるということにとどまらず，それを使って作業し，評価し，いっそう改良するという全過程を含むものとして解されることは注意を要することである。はじめに述べた，数学の応用過程それ自身であるという意味もこのことを考えていたのである。

上の段階の中で，最も困難かつ重要なのは(1)定式化である。これについてM，E，Rayner が引用している「問題をはじめて定式化する段階は，その間ずっと頭脳を使う必要があるので，最も困難な部分である，そのあと，それに代わって数学を使うことができる」という文章はくり返すに値すると Pollak が述べている[12]のはうなづけるところである。この段階では，熟慮した上で関係のうすい細部を無視ないし省略することが必要であるし，それにもとづいた適切な仮定を設定することが必要になる。

数式を使ったモデルでは，このことは，具体的には，変数の生成，変数の選択，関係の生成，関係の選択ということで表されよう。[13] 変数の生成というのは，事象において意味ありとされる諸変数を見つけ出すことである。これは，多くの場合，それ程困難でない。しかし，生成した変数を選択することにおいて「関数のうすい細部の無視ないし省略」がなされるわけである。その際，当然，変数間の関係を生み出し，また，選択することが前提となっているのであり，これが，実は仮定の設定そのものともいえるものである。そして，これらが困難をきわめるといってよいのである。

これに対する具体的な解決策を見出すことは今後の大きな課題といってよいのである。

さて，数学的モデル化過程をいっそうくわしくし，それを流れ図に示すことはいろいろの人が行っている。ここでは，その一つとして，G. G. Hall によるものをあげてみよう。[14]



これによれば，定式化の段階で，上に述べた「変数を選択する」，「変数を関係づける」が取り上げられているうえに，「新しい数学的手法」，「新しい概念」に到達することというように，モデルの改良とそれに必然的に伴うであろうところの数学的方法の改良をも含めている。したがって，広い視野を示すものということができるであろう。

最後に，モデル化過程の段階についての注意を述べておかなくてはならない。

あらためて述べるまでもなく，上に述べた数学的モデル化の段階は，そこに示した順序の通りに機械的直線的に進むものではない。ときには逆行あるいは何回もの往復があり，ときには，飛躍があることであろう。全体としてみて，前に示した段階を辿るといえるのである。

4. 数学的モデル化と数学教育

数学的モデル化が，数学教育の上で重要な意味をもつことに注目され出してから，それ程時間は経っていない。その発端ともいうべきものは，1967年のColloquium'How to Teach mathematics so as to be Useful'[15]であろう。そして，H. O. Pollak[16]によって，数学的モデル化過程の大きな筋が明らかになったのである。

では，どういう理由によって，数学的モデル化は重要とされるのであろうか。その理由を考えてみよう。

まず，第一に，数学の応用が著しく広くなった状況にかんがみ，応用が教育の不可欠な要素であるという認識が高まって，学校数学をもっと応用可能なものにしようとすることである。

これは，数学の進歩と学校教育が余りにもかけ離れていることの認識が数学教育現代化の一つの原因であったと同じく，数学の応用の広さ，深さ，多様さと学校教育が余りにも離れていることの認識にもとずくのである。これまでも，応用という名の教材は学校数学に存在した ── 学科としての応用数学はこの場合別にする ── 。たとえば，方程式の応用，関数の応用などがそれである。しかし，それは，一見，現実の事象のような衣裳をまとっているが，実は，それはまさに表面だけであって，真に重要な本質的な部分は，数学そのものであり，定式化されたものであった。こういったものが全く意味がないというのではないが，そういうものだけが学校数学における応用であるとするならば，今日の数学の応用とは余りにかけ離れているのではないか，数学がもっている「威力」は全く現れていないではないかというのである。

1980年代の学校数学への提言としてアメリカの NCTM が出した，Agenda for Action の第一勧告として，「問題解決への焦点化」においても，この一面が取り上げられていると思われる。[17)]

第二にあげられるのは，数学的モデル化過程に数学的な考え方のさまざまの側面が含まれているので，その育成をモデル化過程を通してはかろうとすることがあげられる。

数学的モデル化過程には，数学的な考え方と呼ばれるものの代表的ともいえる思考法・着想が含まれる。3.において述べているが，(1)定式化においては，単純化・理想化，捨象，及び近似といった思考方法が必要であるし，また，設定される仮定については，当然のことながら，無矛盾のものでなくてならないことを意識しなくてはならない。さらに，数学的に表現するには，数量化・図形化・記号化といった形式化を必要とするのである。これらは，重要な着想である。(2)数学的作業は，いわば，数学そのものであり，数学的な原理・法則ないし手法がフルに活用される。当然，そこでは，分析・総合・演繹といった思考法が必要になる。また，(3)解釈・評価においては，たとえば，結果の数値に対する敏感さが要求されよう。そして，(4)であげたより良いモデル化は，逐次近似の考えそのものといってよいであろう。

ここであげてきたものは，すべて，数学的な考え方といわれるものの基本的な部分である。したがって，数学的モデル化の過程を通して，この面の育成をはかることが十分考えられるわけである。

第三に，数学的モデル化過程は，現実の問題との取組みであることから，単なる知的好奇心以上に，数学教育に対する動機づけを与えるとともに，事象との対決を通して知識の開発される過程に積極的に参加させようとすることがあげられる。特に，モデル化において開発される探求的創造的な面は，数学だけでなくすべての面で必要とされるものである。こういった知識開発の活動としての面は，数学的活動と広く呼ばれるものの一側面ということができるが，きわめて知的であること，また，探求的であることの特徴から，いっそうの重要性を増すことが考えられる。

このほか，いくつかを付け加えることができるであろう。

- 含まれる数学的概念の具体的な例示を与えるので，操作的技能だけでなく，基礎的な理解をいっそう強める。
- 数学の練習問題を用意し，テクニクが必要なときは，その完全修得の重要性を明らかにする。この場合，モデル化は，全範囲の ── 一部分の項目や領域でなく ── 数学的知識を引き出すことを要求する。

以上述べてきた，重要性をふまえるとき，数学的モデル化過程を実際に数学教育の場に持ち来たすことが問題になってくる。

この場合，いろいろの形が考えられよう。

たとえば，数学という教科の中で，数学的モデル化過程をそれと明言しない形で取り上げることは必要であるし，また，可能である。

たとえば，文章題の典型である出会い算を考えてみよう。それは，２人の人が道路上を歩いていて出会うという事象の衣裳を着ているが，実は，距離と時間の比例関係という数学的内容に本質があるのである。単に，こういう比例関係に着目して答を求めるだけでなく，そこに，どんな変数があるか，その中のどの変数だけを選択しているか，また，どのような仮定をおいているかに着目させるとすれば，単なる文章題解決でなく，事象は現実そのものから少し離れていても，モデル化の過程のごく一部分は踏んでいったことになるのであろう。

しかし，こういったものは，明言されない形のものである。

これに対して，表立った形で，モデル化過程それ自身に光をあて，カリキュラムに取入れようとすると，多くの問題点が浮び上がってくる。

第一に，数学的モデル化過程において述べた(1)定式化，あるいは(3)解釈・評価は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度の技能を要求するのではないかと指摘されるのである。定式化の困難さは既に述べた通りであるが，解釈・評価といったことは，考え方自身が深いものであり，学校教育では教授というより，若干の経験をもたせうる程度であるかも知れないのである。

さらに，この点を３つの面から見ていくことにしよう。

(1)　カリキュラムの面

たとえば，数学的モデル化過程をカリキュラムにどのように位置づけるか，また，教材開発が進んでいるかといったことが差当り手始めに考えられよう。

前者では，具体的に，指導時間をどのように生み出すのか，指導者をだれにするかとか，数学科や他教科との関連をどのようにするかなどが問題になる。これらは現実の学校を考えると，いずれも難問である。指導時間一つとってみても，各教科がそんなにたやすく「供出」してくれるであろうか，そこで，本来学際的であるべき数学的モデル化過程といったものが，教科の壁の谷間におしひがれないだろうかというのが，ここの最も大きな問題といえるだろう。

後者の教材開発については，大学レベルでは，諸外国で教科書が書かれているし（たとえば，[9]はすぐれた教科書である），雑誌 International Jornal of Mathematical Edcation in Science and Technology などには，大学を中心に，中等教育にも僅かながら，適切な例を見出すことができる。しかし，全般として中等教育・初等教育におけるものは，USMES [8]以外に見出し難いのが現状である。

このように，カリキュラムの面から見ると，問題点が多く，しかも困難であるところが感じられる。

(2)　教師の面

実際の指導の面において，教師の果す役割は大きい。この数学的モデル化過程を指導することにおいて教師はどうであろうか。

前にも述べた通り，こういった面の重要性の認識は，ようやく近年からであり，教員養成及び現職教育の両面において，この方面の教師教育を十分に受けていることは期待できない。ここに大きな問題点があるのである。

よりつきつめたいい方をすれば，たとえば，数学科教員は，純粋数学と応用数学の両面において，また，隣接科学について十分の教養を教員養成の時期（就職前教育）に身につけ

るべきであり，また，そうであったはずであるのに，現実に，応用についてどうであろうか。それほど楽観的にはなれないのである。

一方，教師としては，カリキュラムの場合と同じく，教科の壁が問題になる。現実に，数学と理科との調整さえ仲々困難なところが見られるのであるから，重ねて，学際的なもの，あるいは，教科の統合的なものへの道はきびしいように思える。

(3) 生徒の面

事象の理解，数学的手法の修得といった生徒の成熟度の問題は，数学的モデル化過程についての適当した教材の開発に対しての基本的条件であり，これは，前に述べたカリキュラムの面と深く関わっている。

さらに，わが国で問題になるのは，高校生が数学の実際的な面に，それ程関心を持たず，積極性をあまり見せないということである。

たとえば，わが国で最も優秀な高校生が在学しているとみられる高校についての調査[19]（1年生，2年生それぞれ1クラス計80名）の結果によって，次のことが明らかになった。

- 数学の有用性そのものについての確信がうすい。
- なかんずく，数学が他教科へのサービスでなく，直接的に役立つという点については，ほぼ半数しか確信をもっていない。数学の有用性は，そんなところになく，論理的思考の伸展にあるという主張が見られる。
- 数学が使えるという経験をもたない。したがって，数学を応用する例としてあげられるのが，日常的な統計，コンピューター，経済，賭けごとといったものに集中し，実感に満ちたものが乏しいし，また，範囲が狭い。

以上のことから，学校数学が，教室あるいは学校に止まっていて，応用にまで目が向いていないように思える。これは，今日の社会状況に大きく依るのであろうが，数学的モデル化過程の指導にあたっての忘れてはならない障害であるといえよう。

以上の考察から，数学的モデル化過程を表立った形で指導の場に持ち込むことには困難点ばかりが目につくようである。したがって，こういうことは止めて，差当りは，明言しない形の指導に走るしかないように見える。

今の現実はそうであるかもしれない。しかし，上のようにいってしまっては，1960年代末からの動きに目をふさぐことになるのでなかろうか。確かに，困難点が目につくが，それは研究が緒についてまだ間がないこともあるだろう。今後に期待できるのではないかとも考えられる。また，マイコンというすぐれた機器は，われわれにシミュレーション・図示といった重大な武器を与えてくれているし，教師や青少年の間に，そういったものへの関心が高まりつつある。これはかすかながら希望を与えてくれるのではないだろうか。

5. まとめと今後の問題点

本稿においては，モデルの意味を考察し，理論からモデルへ，事象からモデルへの２つの方向が考えられ，モデルは，理論と事象とのジョイントとみることができることを示した。そして，数学的モデル，数学的モデル化過程について考察し，いくつかの特性を明らかにした。最後に，数学教育との関連について述べ，カリキュラムに乗せる上での問題点に触れた。それによれば，悲観的にならざるを得ないのであるが，わずかの希望もありうることを示しておいた。

次に，今後の課題をいくつかあげて稿を終ることにしよう。

本稿では，モデルを事象とモデルの面に主にしぼって話を進めている。もう一つの面，それらを合わせ考えることを，数学教育における意義との関連において考察する必要がある。

また，より直接的に，数学的モデル化過程とカリキュラムの問題について，事例の収集

とともに教材開発を行う必要がある。これと，生徒の側の問題点の解明をあわせ行うことで，問題点の解決へささやかな一歩を進めることができるであろう。

謝　　辞

数学的モデル化過程の数学教育における重要性について着目され，指摘されたのは，島田茂先生である。[20] 島田先生の御指導よって筆者はこの問題に目を開くことができたのである。その後も変わることなく温い御指導を与えて下さっている。ここに先生の御鴻恩に対して心からお礼申しあげます。

1）H. O. Pollk：第12章，数学と他の科学との相互作用（ICMI 編，数学教育新動向研究会訳，世界の数学教育ーその新しい動向　共立出版　昭和55年）p. 300.

2）H. Freudenthal (ed)：The Concept and the Role of Model in Mathematics and Natural and Social Sciences (D. Reidel. 1961) p. 100

3）R. Wilder：Introduction to the Foundation of Mathematics (R. E. Krieger Publishing co. 1965) p. 24.

4）2). pp. 1－3.　筆者の概括による.

5）岩波生物学辞典第2版（山田常雄ほか編．岩波書店　昭和52年）p. 1204.

6）A. Pinker：The concept “model” and its potential role in mathematics education (Int. J. Math. Edu. Sci. Tech. vol. 12. 1981) pp. 693－707.

7）D. N. P. Murthy：A note on mathematical model (Int. J. Math Edu. Sci. Tech. vol. 10. 1979) pp. 97－100.

8）D. N. Burghes, M. S. Borrie：Mathematical modelling：(Conference on Co-operation between Sciencc Teachers and Mathematics Teachers, 1978. への報告）pp. 28－31.

9）D. P. Maki, M. Thompson：Mathematical Model and Applications (Prentice-Hall. 1973) pp. 302－311.

10）筆者：モデル化（筑波大学教育学研究会会編　現代教育学の基礎．ぎょうせい，昭和57年）

11）10) pp. 286－288.

12）1) p. 305.

13）V. Treilibs, H. Burkhardt, B. Low：Formulation processes in mathematical modelling (Shell Centre for Mathematical Education University of Nottingham 1980) pp. 29－42.

14）G. G. Hall：Chap 2, Applied Mathematics, (G. T. Wained), Mathematics Education. van Nortrand Reinhold 1978) p. 29.

15）H. Freudenthal (ed), Proceedings of the Colloquim ‘How to Teach Mathematics so as to be Useful’, Utrecht Aug. 21－25, 1957. (Educational Studies in Math, vol. 1 1968) pp. 1～243.

16）H. O. Pollak：Chap 8, Application of mathematics (E. G. Begle (ed). Mathematics Education, 69 th yearbook of the National Society for the Study of Education, University of Chicago Press (1970) pp. 311－334.

17）National Council of Teachers of Mathematics：An Agenda for Action (NCTM, 1980) pp. 2－5.

18）Unified Science and Mathamatics for Elementary Schools (Education Development Centre, Inc. 1974)

19）東京都内の某国立高校2年，1年各1クラス計80名に対する調査，これは，昭和57年3月に実施したものである．

20）島田茂：算数・数学科のオープンエンドアプローチ（みずうみ書房　昭和52年）